

## Analysis.

### Integraltransformationen:

**Erdélyi, A.:** On the connection between Hankel transforms of different order. J. Lond. Math. Soc. **16**, 113—117 (1941).

Zwei in  $L_2(0, \infty)$  enthaltene Funktionen  $f(x)$ ,  $F(x)$  seien durch die Hankelsche Abbildung  $\mathfrak{H}_\mu$  von der Ordnung  $\mu$  verbunden,  $F(x) = \mathfrak{H}_\mu f(x)$ . Ist  $F(x) = f(x)$ , so heiße  $f(x)$  bildtreu bei  $\mathfrak{H}_\mu$ . Bisher hat man nach Ansätzen geforscht, die die bei  $\mathfrak{H}_\mu$  bildtreuen Funktionen in Funktionen überführen, die bei  $\mathfrak{H}_\nu$  bildtreu sind. Allgemeiner betrachtet Verf. Paare von Funktionen  $f(x)$ ,  $F(x)$ , die einander bei  $\mathfrak{H}_\mu$  in dem eingangs erklärten Sinne zugehören, und sucht Verfahren, die sie in ein Paar in bezug auf  $\mathfrak{H}_\nu$  einander zugehöriger Funktionen überführen. Auf Einzelheiten der Beweise hier und weiterhin verzichtend, findet er in dieser Hinsicht folgende beiden allgemeinen Regeln: Sind  $\mathfrak{R}(t)$  und  $\mathfrak{I}(t)$  die Mellinschen Bilder der Funktionen  $K(x)$  und  $k(x)$ , so ist das Bestehen der Beziehung

$$(1) \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2} - it) \Gamma(\tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2} - it) \mathfrak{R}(t) = \Gamma(\tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2} + it) \Gamma(\tfrac{1}{2}\nu + \tfrac{1}{2} + it) \mathfrak{I}(-t)$$

dazu notwendig und hinreichend, daß

$$(2) \quad \int_0^\infty K(xy) F(y) dy = \mathfrak{H}_\nu \left\{ \int_0^\infty k(xy) f(y) dy \right\}.$$

Ersetzt man  $i$  in den ersten der drei Malteile auf der linken und rechten Seite von (1) durch  $-i$ , so erhält man die kennzeichnende Bedingung dafür, daß

$$(3) \quad \int_0^\infty K(x/y) F(y) dy/y = \mathfrak{H}_\nu \left\{ \int_0^\infty k(x/y) f(y) dy/y \right\}$$

ist. Zu beiden Regeln (2) und (3) findet Verf. Gestalten des Kernes; wenn  $m, n$  die zweiten Zeiger der nach Bedarf gestutzten Besselschen Funktionen ( $J_{\mu, m}$ ,  $J_{\nu, n}$ ) sind und

$$[x^{1\nu} (1+x)^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu - 1}]_{m, n} = x^{1\nu} (1+x)^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu - 1}$$

$$- \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(-1)^r}{r!} (\tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu + 1)_r x^{-\frac{1}{2}\mu - r - 1} - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{s!} (\tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}\nu + 1)_s x^{1\nu + s}$$

mit  $(\lambda)_r = \Gamma(\lambda + r)/\Gamma(\lambda)$  gesetzt wird, lautet eine solche bei der Regel (2)

$$\frac{K(x)}{k(x)} = \int_0^\infty [(xy)^{1\nu} (1+xy)^{-\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu - 1}]_{m, n} \frac{h(y)}{y^{-1}h(y^{-1})} dy.$$

Verf. gibt weitere Kerne an, die sich durch Differential- und Integral-Operatoren ausdrücken, und klärt das Dasein verschiedener Kerne auf folgende Weise auf: Funktionenpaare, die durch  $\mathfrak{H}_\mu$  verbunden sind, mögen zur Klasse  $R_\mu$  gehören. (2), (3) führen  $R_\mu$  in  $R_\nu$  über. Auf allgemeinste Weise geschieht das, indem man  $R_\mu$  auf besondere Weise in  $R_\nu$  und  $R_\nu$  auf die allgemeinste Weise in sich überführt. Die verschiedenen Kerne unterscheiden sich durch die besondere Überführung  $R_\mu \rightarrow R_\nu$ . — Verf. bemerkt, daß seine Ergebnisse sich auf die allgemeine Watsonsche Abbildung übertragen lassen.

Koschmieder (Graz).

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Julia, Gaston:** Sur les systèmes duaux de vecteurs dans l'espace hilbertien. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 324—326 (1943).

Une suite  $f_1, f_2, \dots$  d'éléments de l'espace  $H$  hilbertien admet une suite duale (ou biorthogonale)  $g_1, g_2, \dots$  (c'est-à-dire telle que  $(f_i, g_j) = \delta_{ij}$ ), dont chaque élément



appartient à la variété linéaire fermée  $V$  déterminée par tous les  $f_k$ , sous la condition nécessaire et suffisante qu'aucun  $f_i$  n'appartienne à la variété linéaire fermée déterminée par  $f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots$ . Soit  $e_1, e_2, \dots$  un système orthonormal complet dans  $H$ . L'Auteur envisage les opérateurs  $A$  et  $A^*$  définis par

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) f_n, \quad A^*v = \sum_{n=1}^{\infty} (v, f_n) e_n,$$

lorsque les séries respectives convergent fortement, ainsi que les opérateurs  $B$  et  $B^*$  formés à partir des  $g_n$  au lieu des  $f_n$ . Il établit certaines relations entre les domaines de ces opérateurs, ainsi que des conditions pour que certains d'eux soient bornés. (Cf. les Notes précédentes de l'Auteur sur le même sujet, ce Zbl. 25, 65, 413, 26, 233.)

*Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Julia, Gaston:** Sur la structure des systèmes duaux dans l'espace hilbertien. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 396—399 (1943).

Soient les suites  $\{f_n\}$  et  $\{g_n\}$  comme dans le référat précédent. Les éléments  $g_n$  appartenant, par définition, à la variété linéaire fermée  $V = [f_1, f_2, \dots]$ , on a  $W = [g_1, g_2, \dots] \subseteq V$ . L'auteur se propose de distinguer les deux cas:  $W = V$  et  $W \neq V$ . Il appelle noyau de la suite  $\{f_n\}$  la variété linéaire fermée  $N$ , intersection des variétés linéaires fermées  $V'_n = [f_{n+1}, f_{n+2}, \dots]$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).  $N$  et  $W$  sont orthogonaux complémentaires par rapport à  $V$ . Si donc  $N = O$ , alors  $V = W$ , et le rôle de  $V$  et  $W$  est réciproque:  $\{g_n\}$  a pour dual  $\{f_n\}$ . Le cas  $N \neq O$  est aussi possible, on a alors  $W \neq V$ , et le dual  $\{f'_n\}$  de  $\{g_n\}$  ne coïncide pas avec  $\{f_n\}$ ,  $f'_n$  étant égal à la projection orthogonale de  $f_n$  sur  $W$ . — L'étude du noyau  $N$  est intimement liée à celle du développement

$$h \sim \sum_{k=1}^{\infty} (h, f_k) g_k.$$

En particulier, si  $N \neq O$  et  $h \in N$  ( $h \neq 0$ ), alors la convergence forte ou faible de cette série est impossible; en désignant par  $z_n$  la somme partielle d'indice  $n$ , on a même  $\|z_n\| \rightarrow \infty$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

*Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Julia, Gaston:** Exemples de structure des systèmes duaux de l'espace hilbertien. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 465—468 (1943).

Construction des suites  $\{f_n\}$  dont les noyaux  $N$  sont respectivement de dimension 0, 1, 2, ... et infinie.

*Béla de Sz. Nagy (Szeged).*

**Fréchet, Maurice:** Sur le problème ergodique. Rev. Sci., Paris 81, 155—157 (1943).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [Fréchet, Rev. Sci. Paris, 79, 407—417 (1941); dies. Zbl. 27, 77] beweist Verf. einen neuen Ergodensatz. Es sei  $N = T_t M$  eine von dem Zeitparameter  $t \geq 0$  abhängige Transformation, die jeden Punkt  $M$  einer beschränkten abgeschlossenen Menge  $S$  (im  $m$ -dimensionalen euklidischen Raume) in einen Punkt  $N$  von  $S$  bringt. Es werden die folgenden Voraussetzungen gemacht: 1.  $T_{t+t'} M = T_t(T_{t'} M)$ . 2. Für jeden Punkt  $M$  von  $S$  ist  $T_t M$  eine stetige Funktion von  $t (\geq 0)$ . 3.  $T_t M$  ist eine Funktion von  $M$ , welche gleichgradig stetig auf  $S$  ist, während  $t \geq 0$  variiert. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine die drei folgenden Bedingungen erfüllende Funktion  $u(e, M)$ : 1. Für jeden festen Punkt  $M$  von  $S$  ist  $u(e, M)$  eine vollständig additive Mengenfunktion von Untermengen  $e$  von  $S$ . 2.  $u(e, M) \geq 0$ ,  $u(S, M) = 1$ . 3. Für jede reelle stetige auf  $S$  erklärte Funktion  $f(N)$  und für jeden Punkt  $M$  von  $S$  gilt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L f(T_t M) dt = \int_S f(N) du(e, M),$$

wo  $N$  die zu  $e$  gehörige Integrationsvariable bedeutet. — Bemerkenswert ist, daß in diesem Satz die Unzerlegbarkeit von  $S$  nicht gefordert wird (vgl. die zitierte Arbeit des Verf.). — Dann kommt Verf. auf einen früheren Satz zurück, welcher sich in der ersten Kolonne der Seite 416 der zitierten Arbeit befindet. Nach einer Mitteilung des Ref. ist der Beweis dieses Satzes unrichtig. Dieser Satz bleibt unbewiesen. *Ky Fan (Paris).*



## Praktische Analysis:

**Hahn, Kurt:** Addier- und Subtrahiergetriebe. *Meßtechnik* **19**, 207—210 (1943).

Verf. beschreibt einige Addier- (bzw. Subtrahier-)getriebe, bei denen die Glieder, welche die Rechenwerte darstellen, für den notwendigen Rechenbereich weniger als eine volle Umdrehung auszuführen brauchen. Alle beschriebenen Geräte sind „rückkehrende“, d. h. An- und Abtriebsglied sind in demselben Gelenkpunkt gelagert. Für sie wird eine Maßstabsformel

$$\frac{1}{\varphi_a} + \frac{1}{\varphi_d} = \frac{1}{\psi}$$

aufgestellt (Herleitung an einem Stirnraddifferential,  $\varphi_a, \psi$  Drehwinkel der beiden auf derselben Achse sitzenden Räder,  $\varphi_d$  Drehwinkel des Steges), mit deren Hilfe man nach Festlegung des Maßstabes eines Rechenwertes die der beiden anderen bestimmen kann. Ferner wird ein Getriebe ohne Zahnräder und Gleitführungen, ein einfach und billig herstellbarer sechsgliedriger Koppeltrieb beschrieben, der allerdings die Addition nicht exakt, aber mit einer für viele Zwecke genügend genauen Annäherung verwirklicht. Die Rechengenauigkeit kann durch Übergang zu einem achthgliedrigen Getriebe erheblich gesteigert werden.

*Collatz* (Hannover).

**Parodi, Maurice:** Deux méthodes de calcul de la fonction  $y(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ .

*Rev. Sci.*, Paris **81**, 171—172 (1943).

Zur Berechnung des im Titel genannten Integrales werden eine graphische Methode (Konstruktion des Produktes im Integranden nach dem Ähnlichkeitssatz) und eine numerische (Auswertung des Integrales nach der Trapezregel) genannt. *Collatz*.

**Collatz, L.:** Graphische Lösung von Randwertproblemen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. *Z. angew. Math. Mech.* **23**, 237—239 (1943).

Ein bereits von Kirste (1937) und Drymael (1941) entworfenes Verfahren wird auf Grund einer Arbeit von Kappus [*Z. V. D. I.* **87**, 26—28 (1943)] nochmals aufgegriffen und in neuer, vorwiegend geometrischer Weise dargestellt. Es geht dabei um die aus der Baustatik bekannte Methode der Festpunkte zur Summierung von Differenzengleichungen. Wesentlich ist, daß zwischen den Koordinaten  $\xi_{i+1}, \eta_{i+1}$  der Festpunkte und  $x_i, y_i$  der Summenfunktion ein in  $y_i$  ganzer linearer Zusammenhang besteht, der für  $y_i$  identisch erfüllt sein muß und so zu Bestimmungsgleichungen für  $\xi_{i+1}$  und  $\eta_{i+1}$  führt. Für die Auswertung dieser Gleichungen gibt Verfasser ein graphisches Verfahren an, welches also die Festpunkte liefert; dann ist wie bei den früheren Verfahrensangaben fortzufahren.

*v. Guérard* (Darmstadt).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

**Ghizzetti, Aldo:** Sui momenti di 2° ordine di una legge di probabilità in  $n$  dimensioni. *Rend. Mat.*, Univ. Roma, V. s. **4**, 94—101 (1943).

L'Auteur considère les lois de probabilité dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions et appelle lois  $\Delta_L$  celles qui sont absolument continues, dont la densité  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  admet le nombre  $L > 0$  pour pseudo-borne supérieure (c'est à dire que  $f$  est  $\leq L$  presque-partout et que  $f$  est  $> L - \varepsilon$  sur un ensemble de mesure  $> 0$  quel que soit  $\varepsilon > 0$ ), dont les moments d'ordre 2  $m_{ik} = \int x_i x_k f d\tau$  sont finis et dont les moments d'ordre 1  $m_i = \int x_i f d\tau$  sont nuls; il montre que: la condition nécessaire et suffisante pour que  $\frac{n(n+1)}{2}$  nombres donnés  $m_{ik}$  soient les moments d'ordre 2 d'une loi  $\Delta_L$  est que la forme quadratique  $\sum_{i,k} m_{ik} \lambda_i \lambda_k$  soit définie positive et que son discriminant  $M$  soit supérieur ou



égal à  $(n+2)^{-n} \pi^{-n} L^{-2} \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \right]^2$ , l'égalité ayant lieu dans le cas et seulement dans le cas d'une repartition uniforme à l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation:  $\sum_{i,k} m_{ik}^* x_i x_k = n+2$ ,  $m_{ik}^*$  désignant les éléments du déterminant réciproque du déterminant des  $m_{ik}$ .

R. Fortet (Paris).

### Statistik:

Ville, Jean: Sur un critère d'indépendance. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 552—554 (1943).

Die Frage, ob sich  $n$  Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  als die von einer Zufallsvariablen  $X$  in  $n$  unabhängigen Proben angenommenen Werte deuten lassen, behandelt Verf., indem er mit beliebigem festem  $m$   $y_i = 0$  für  $x_i \leq m$  und  $y_i = 1$  für  $x_i > m$  setzt und die Folge der  $n$   $y$ -Werte zu den Ergebnissen von Urnenziehungen nach dem Bernoullischen Schema in Beziehung setzt. Nimmt man allgemeiner die  $y_i$  in einfacher Markoffscher Kette verknüpft an mit den Anfangswahrscheinlichkeiten  $p_0, p_1$  und den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{00}, p_{01}, p_{10}, p_{11}$ , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, in den ersten  $n$  Versuchen  $r_1, r_2, r_3, r_4$  Wiederholungen der entsprechenden Art anzutreffen, offenbar  $A p_{00}^{r_1} p_{01}^{r_2} p_{10}^{r_3} p_{11}^{r_4}$  mit

$$A = \begin{cases} p_0 \binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1} \binom{r_3 + r_4}{r_3} & \text{für } r_2 = r_3 + 1, \\ p_0 \binom{r_1 + r_2}{r_1} \binom{r_3 + r_4 - 1}{r_3} + p_1 \binom{r_1 + r_2 - 1}{r_1} \binom{r_3 + r_4}{r_3} & \text{,, } r_2 = r_3, \\ p_1 \binom{r_1 + r_2}{r_1} \binom{r_3 + r_4 - 1}{r_3} & \text{,, } r_2 = r_3 - 1. \end{cases}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  strebt diese dreidimensionale Verteilung gegen eine zweidimensionale; für  $r_1, r_4$  erhält Verf. asymptotisch

$$r_1 = n \cdot \frac{p_{00} p_{10}}{p_{01} + p_{10}} - \frac{\sqrt{n p_{01} p_{10}}}{(p_{01} + p_{10})^{\frac{1}{2}}} \cdot [(1 + p_{10}) \sqrt{p_{00}} \cdot u + p_{00} \sqrt{p_{11}} \cdot v],$$

$$r_4 = n \cdot \frac{p_{11} p_{01}}{p_{01} + p_{10}} + \frac{\sqrt{n p_{01} p_{10}}}{(p_{01} + p_{10})^{\frac{1}{2}}} \cdot [p_{11} \sqrt{p_{00}} \cdot u + (1 + p_{01}) \sqrt{p_{11}} \cdot v],$$

wo  $u, v$  zentrierte, normierte, normal verteilte Variablen sind. Im Spezialfalle des Bernoullischen Schemas ( $p_0 = p_1 = p_{00} = p_{01} = p_{10} = p_{11} = \frac{1}{2}$ ) ist der Ausdruck

$$\chi^2 = u^2 + v^2 = \frac{1}{n} \cdot \left[ 5 \left( r_1 - \frac{n}{4} \right)^2 + 5 \left( r_4 - \frac{n}{4} \right)^2 + 6 \left( r_1 - \frac{n}{4} \right) \left( r_4 - \frac{n}{4} \right) \right]$$

mittels der  $\chi^2$ -Verteilung zu prüfen. In Praxi wird  $m$  gleich dem Zentralwert der  $n$  beobachteten  $x$ -Werte gewählt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Barricelli, Nils Aall: Les plus grands et les plus petits maxima ou minima annuels d'une variable climatique. Arch. Math. og Naturvid. B **46**, Nr 6, 1—40 (1943).

Nach einleitender Darstellung der Gumbelschen Theorie der Verteilung der Extremwerte einer Zufallsvariablen in Stichproben bestimmten Umfangs [E. J. Gumbel, Les plus grands âges en Suisse, Journ. de Statist. et Revue Econom. Suisse. **70** (1934); Le più alte età in Svezia; Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari **6** (1935)] wendet Verf. dieselbe auf Meßreihen einiger klimatischer Variablen an. Die teilweise nicht befriedigende Übereinstimmung zwischen berechnetem und beobachtetem Mittelwert des größten bzw. kleinsten Jahresmaximums wird durch die Tatsache erklärt, daß die apriorische Verteilung  $dV(x) = v(x) dx$  der klimatischen Variablen  $x$  sich im Laufe der Zeit ändert, so daß das näherungsweise sich aus der Gleichung  $V(\tilde{u}) = 1 - \frac{1}{N}$  bestimmende Dichtemittel  $\tilde{u}$  des Maximums von  $N$   $x$ -Werten nicht wie bei Gumbel



konstant ist. Verf. erweitert daher die Gumbelsche Theorie, indem er der Inkonzanz von  $V(x)$  Rechnung trägt und das infolgedessen variierende  $\tilde{u}$  nach einem zunächst beliebigen Gesetz  $f(\tilde{u}) d\tilde{u}$  in der Zeit verteilt annimmt. Hieraus gewinnt er näherungsweise die Verteilung  $\varphi(x) dx$  des Maximums  $x$  von  $N$  Variablenwerten,

$$\varphi(x) = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\alpha(x-u)} - e^{-\alpha(x-u)} du$$

mit näherungsweise konstantem  $\alpha = \frac{v(\tilde{u})}{1 - V(\tilde{u})}$ , welche für konstantes  $\tilde{u}$  in die Gumbelsche Maximums-Verteilungsdichte  $\alpha \cdot \exp\{-\alpha(x - \tilde{u}) - e^{-\alpha(x - \tilde{u})}\}$  übergeht und sich im umgekehrten Extremfalle eines sehr flachen  $f(\tilde{u})$  mit  $f(x)$  deckt. Verf. setzt sodann  $f(\tilde{u})$  als Normalverteilung voraus und zeigt, wie sich die Theorie den Beobachtungsreihen anpassen läßt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik:**

**Keinänen, Einar:** Über die Altersverteilung der Bevölkerung. (*Luzern, Sitzg. v. 24. bis 29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 305—315 (1941).

Verf. gibt einen Überblick über die Entwicklung der Wanderungen, der Sterblichkeit und der Fruchtbarkeit in Finnland. Das vorhandene statistische Material genügt nach den Äußerungen des Verf. kaum, um eine genaue Vorausberechnung der Altersverteilung zu erzielen. Es genügt durchaus, ein von H. Cramér [Skand. Aktuarietidskrift 18, 35—54 (1935)] zur Vorausberechnung der schwedischen Bevölkerung herangezogenes einfaches Verfahren einzuschlagen. Eine auf diese Weise errechnete Altersverteilung wird der tatsächlichen gegenübergestellt.

H. Hadwiger (Bern).

**Zwinggi, Ernst:** Entwicklung von Personengesamtheiten. (*Luzern, Sitzg. v. 24. bis 29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 263—273 (1941).

Verf. gibt einen zusammenfassenden Bericht über die mathematische und statistische Theorie der Personengesamtheiten mit besonderer Berücksichtigung der von E. Zwinggi, M. Presburger A. Maret, E. Keinänen, R. Tarjan, W. Dobbernack und G. Tietz, H. Hadwiger und W. Wegmüller gelieferten Beiträge zur Schrift des XII. internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker. Im Hinblick auf die historische Entwicklung und auch auf den gegenwärtigen Stand der Theorie nimmt Verf. eine Dreiteilung des Fachschrifttums nach Form und Zielsetzung vor. Die erste Gruppe umfaßt die vor allem durch Ch. Moser begründete rein mathematische Behandlung des Problems der Erneuerung und Umschichtung von Personengesamtheiten, die von A. J. Lotka und zahlreichen deutschen und schweizerischen Autoren in den letzten Jahren eine wesentliche Förderung erfahren hat. Es handelt sich vor allem um die Diskussion der Erneuerungsfunktion als Lösung einer Volterra'schen Integralgleichung. Mit Berücksichtigung der Altersschichtung einer Gesamtheit wird man auf eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die sog. Strukturfunktion geführt. Die zweite Gruppe umfaßt die Arbeiten über die Extrapolation des Bevölkerungsstandes. Die Bevölkerungsgröße wurde vor allem in früheren Jahren als Lösung einer Differentialgleichung dargestellt, in der für die Wachstumsintensität plausible oder näherungsweise zutreffende Annahmen gemacht wurden. Zur zahlenmäßigen Abschätzung der zukünftigen Entwicklung einer Bevölkerung wird heute fast ausschließlich die Methode der Fortschreibung befolgt. Der Zusammenhang zwischen der Bevölkerungsgröße und der Geburtenzahl mit Berücksichtigung der Altersstruktur des Personenbestandes kann in kontinuierlicher Behandlung auch durch eine Volterra'sche Integralgleichung beschrieben werden. Besondere Beachtung der Theoretiker fand stets die Frage nach dem asymptotischen Verhalten des Bevölkerungsbestandes. Hier unterscheidet man den stationären und den stabilen Fall, je nachdem die Be-



völkerungsgröße absolut konstant oder nur die Altersschichtung unverändert bleibt. Die dritte Gruppe handelt schließlich von den rein statistischen Möglichkeiten. — Nach Ansicht des Verf. sind beachtenswerte Resultate erzielt worden, doch fallen die Ergebnisse, die praktische Erkenntnisse bieten, gegen die rein theoretischen Ansätze etwas zurück. *H. Hadwiger (Bern).*

**Dobbernack, W., und G. Tietz:** Die Entwicklung von Personengesamtheiten vom Standpunkt der Sozialversicherungstechnik. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 4, 233—253 (1941).

Für die deutsche soziale Rentenversicherung ist das allgemeine Prämiendurchschnittsverfahren als Deckungsverfahren gesetzlich vorgeschrieben worden. Damit wird die rechnerische Erfassung des zukünftigen Versichertenbestandes erforderlich. Im Hinblick auf gesetzliche Verordnungen, wonach bestimmten Schichten der allgemeinen Bevölkerung die Versicherungsbeteiligung vorgeschrieben wird, ist eine besonders enge Verknüpfung der Weiterentwicklung des Versichertenbestandes mit derjenigen der gesamten Bevölkerung überhaupt gegeben. Um die für die Praxis erforderlichen Unterlagen zu beschaffen, genügen nach Ansicht der Verf. die rein mathematischen Entwicklungsformeln (z. B. die Bevölkerungsgesetze von Euler und Verhulst) keineswegs. Die Vielgestaltigkeit der Einflüsse, denen die für die Weiterentwicklung maßgeblichen Faktoren, wie Sterblichkeit, Fruchtbarkeit, Alters- und Familienstandsgliederung unterworfen sind, spricht entschieden gegen die Möglichkeit einer formelmäßigen Darstellung. Es bleibt das vom Statistischen Reichsamt als „biologische Methode“ bezeichnete Fortschreibungsverfahren, nach welchem die Bevölkerung von Jahr zu Jahr fortschreitend auf Grund der mitterrechneten Altersstruktur ermittelt wird. — Verf. zeigen, daß sich unter der Voraussetzung konstanter Sterblichkeit und Fruchtbarkeit asymptotisch der Typus der sog. stabilen Bevölkerung entwickelt, bei der Geschlechts- und Altersgliederung unverändert bleibt, während ihr Umfang das Gesetz der geometrischen Reihe realisiert. Hierbei findet eine bekannte analytische Methode der Behandlung rekurrenter Zahlenfolgen (Partialbruchzerlegung der erzeugenden gebrochenen rationalen Funktion) geschickte Verwendung. *H. Hadwiger (Bern).*

**Presburger, M.:** Sur l'étude générale des collectivités de personnes. (*Luzern, Sitzg. v. 24.—26. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 353—362 (1941).

Verf. erweitert die bekannten Ansätze des Erneuerungsproblems für Personengesamtheiten dahin, daß er sowohl für den Personenbestand als auch für die Neuzutritte eine Altersschichtung formelmäßig miteinbezieht. So wird eine mathematische Grundlage erzielt, die den Erfordernissen der Praxis, wo die Altersstruktur der Bestände praktisch wichtige Auswirkungen zeitigt, besser gerecht wird. — Es bezeichne  $M(x, t)$  die Bestandesfunktion der Personen der Gesamtheit des Alters  $x$  zur Zeit  $t$ , ferner  $L(x, t)$  die Differenz der neu eintretenden gegenüber den austretenden Personen vom Alter  $x$  im Zeitpunkt  $t$ . Es gelten nach den Ansätzen des Verf. die nachfolgenden Gleichungen:

$$M(x, t) = M(x - t, 0) p(x - t, x) + \int_0^t L(x - \xi, t - \xi) p(x - \xi, x) d\xi, \quad (x \geq t);$$

$$M(x, t) = \int_0^x L(x - \xi, t - \xi) p(x - \xi, x) d\xi, \quad (x < t).$$

Hierbei bezeichnet  $p(y, x)$  die Erlebenswahrscheinlichkeit des Alters  $y$  für eine  $x$ -jährige Person. Die zweite Gleichung läßt sich auf eine partielle Differentialgleichung

$$L(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial t} + \mu(x) M(x, t)$$

zurückführen, wobei noch die Intensität  $\mu(x) = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$  eingeführt wurde. — Ein zweiter Teil der Arbeit handelt von den Anwendungen der theoretischen Ansätze in verschiedenen Versicherungsgeschäften. *H. Hadwiger (Bern).*



**Maret, Alfred: Direkte Berechnung der Vorgangsfunktionen einer offenen Gesamtheit.** (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 387—391 (1941).

Bezeichnet  $f(t)$  die Ausscheidefunktion in einer geschlossenen Gesamtheit,  $F(t)$  die Erneuerungsfunktion einer offenen Gesamtheit und schließlich  $y(t)$  bzw.  $Y(t)$  eine allgemeine Vorgangsfunktion in der geschlossenen bzw. offenen Gesamtheit, die mit der Erneuerungsfunktion durch die Mosersche Relation

$$(1) \quad Y(t) = y(t) + \int_0^t y(t-z) F(z) dz$$

verknüpft ist, so läßt sich, wie Verf. bemerkt, die Vorgangsfunktion  $Y(t)$  als Lösung der Volterraschen Integralgleichung

$$(2) \quad Y(t) = y(t) + \int_0^t Y(t-z) f(z) dz$$

darstellen. Damit wird dargetan, daß es für die Ermittlung der Vorgangsfunktion  $Y(t)$  unnötig ist, die Erneuerungsfunktion  $F(t)$  in expliziter Form durch Auflösung der bekannten Integralgleichung

$$(3) \quad F(t) = f(t) + \int_0^t f(t-z) F(z) dz$$

zu berechnen, indem man direkt auf (2) greifen kann. Ref. bemerkt dazu, daß es sich bei der Formelgruppe (1) bis (3) um einen Spezialfall (Faltungstypus) eines geläufigen Relationensystems der Integralgleichungstheorie handelt, indem (1) als Darstellung der Lösung  $Y(t)$  der Integralgleichung (2) durch den sog. reziproken Kern  $F(t)$  des ursprünglichen Kernes  $f(t)$  gelesen werden kann. Die Beziehung (3) ist dann die Kernrelation.

H. Hadwiger (Bern).

**Schwarz, Hans: Zur „wahrscheinlichkeitstheoretischen Stabilisierung“ beim Erneuerungsproblem.** Math. Ann. 118, 771—779 (1943).

H. Richter hat in seiner Habilitationsschrift (dies. Zbl. 26, 126), in der er das Erneuerungsproblem einer eingehenden Behandlung unterzog, u. a. gezeigt, daß die sog. wahrscheinlichkeitstheoretische Stabilisierung des Erneuerungsvorgangs (vgl. über diesen Begriff das oben zitierte Referat) dann eintritt, wenn die Ausscheidefunktion quadratintegrierbar ist und ihr zweites Potenzmoment existiert. Mit der vorliegenden Arbeit gelingt es dem Verf., das gleiche Resultat unter der schwächeren Voraussetzung abzuleiten, daß das erste Potenzmoment, die sog. mittlere Verweilszeit, existiert. In der diskontinuierlichen Behandlung des Problems wird beim Beweis ein Satz Tauberscher Art von Hardy und Littlewood [Proc. London Math. Soc., II. s. 13, 174 (1914)] verwendet, während bei der kontinuierlichen Darstellung der entsprechende Taubersche Satz der Theorie der Laplacetransformation (vgl. G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, S. 208; dies. Zbl. 18, 129) herangezogen wird.

H. Hadwiger (Bern).

**Tarjan, Rudolf: Untersuchungen über den Kapitalbedarf des Lebensversicherungsgeschäfts.** (*Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.*) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 335—348 (1941).

Nach der Formulierung des Verf. stellt das Lebensversicherungsgeschäft eines Wirtschaftsgebietes eine offene, d. h. sich durch entsprechenden Neuzugang stets erneuernde, Personengesamtheit dar. Trotzdem der Neuzugang nicht wie bei der Sozialversicherung zwangsweise erfolgt, ist er für — theoretisch gesehen — unendlich lange Zeit als gesichert anzunehmen. — Bezeichnet  $p_x(t)$  die  $t$ -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person ( $x$  = Eintrittsalter),  $s(t)$  den Saldo der Einnahmen und Ausgaben im Zeitpunkt  $t$ ,  $B(t)$  den Versichertenbestand zur Zeit  $t$  und endlich  $e(t)$  die



Erneuerungsfunktion, so gilt unter der Voraussetzung, daß die (nicht gezillmerten) Abschlußkosten proportional zum Neuzugang sind, die Volterrasche Integralgleichung

$$e(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t e(z) p_z(t-z) dz.$$

Hierbei bedeutet  $\varphi(t) = \lambda B(0) p_z(t) - \frac{1}{\alpha} s(t)$  und  $\alpha$  und  $\lambda$  sind noch sich aus dem Zusammenhang ergebende Konstanten. Verf. führt nun eine auf V. H. Kostitzin (dies. Zbl. 10, 169) zurückreichende Lösungsmethode durch. Die Rechnungen sind rein formaler Natur und erstrecken sich z. B. auf Integrale wie  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ip}}{p} dp = \pi i$ , die im gewöhnlichen Sinn nicht existieren ( $\pi i$  ist ein Cauchyscher Hauptwert).

H. Hadwiger (Bern).

**Zwinggi, Ernst:** Über Zusammenhänge zwischen der technischen Stabilität einer Sozialversicherungskasse und der Entwicklungsformel für den Versichertenbestand. (Luzern, Sitzg. v. 24.—29. VI. 1940.) Ber. 12. internat. Kongr. Versich.-Math. Luzern 1940 3, 395—407 (1941).

Unter der „technischen Stabilität“ einer Sozialversicherungskasse versteht Verf. das zwischen den Leistungen der Kasse und den Beitragsaufwendungen der Versicherten für den Bestand am Bilanztag mit Einkalkulation zukünftiger Eintrittsgewinne bestehende Gleichgewicht. Ohne Berücksichtigung dieser Weiterentwicklung des Versicherungsgeschäftes liefert die Bilanz einen „latenten Fehlbetrag“, dessen Größe wesentlich von der gewählten Entwicklungsformel abhängt. Verf. untersucht nun den Einfluß verschiedener Entwicklungsformeln auf diesen Fehlbetrag oder also auf die technische Stabilität. U. a. wird gezeigt, daß der latente Fehlbetrag wächst, wenn die Neuzugangsfunktion eine zunehmende logistische Funktion ist und daß er sich bei geeigneten Vermehrungsformeln asymptotisch stationär verhalten kann. H. Hadwiger.

**Trifer, Gunnar:** On some methods of single-premium apportionment, especially in collective pensions insurance. Skand. Aktuarie Tidskr. 1943, 1—14.

Eine Kapital- oder Rentenversicherung soll für eine Gruppe von Personen (z. B. Angestellte einer Firma) abgeschlossen werden. Es kann sich in den meisten Fällen um eine kollektive Pensionsversicherung für die ganze Gruppe handeln. Die versicherte Summe kann sich von einer Person zur anderen ändern. Zum Zwecke der Reduktion der Jahresprämie für die ganze Gruppe soll eine feste Einmalprämie am Anfang der Versicherung bezahlt werden. Es wird die Frage der gleichmäßigen Zuteilung aus der Einmalprämie zu jedem individuellen Falle zwecks Reduktion seiner Jahresprämie behandelt. Die Methode der minimalen und maximalen Jahresprämie wird formuliert; darauf wird die pro-rata-Methode und die Methode der maximalen Rate erklärt. Es wird bewiesen, daß die pro-rata-Methode höhere Jahresprämien gibt als die Methode der maximalen Rate. Dann wird die sogenannte DP-Methode oder Methode mit Reduktion des Defizites in der Prämienreserve behandelt. Zum Schluß wird ein numerisches Beispiel zur Aufklärung der genannten Methoden berechnet. Janko (Prag).

## Geometrie.

### Grundlagen:

**Löbell, Frank:** Geometrie, Wirklichkeit und Anschauung. Forsch. u. Fortschr. 19, 174—175 (1943).

„Es schiebt sich . . . zwischen die reine, abstrakte Geometrie und die empirische Geometrie des wirklichen Raumes noch eine „Anschauungsgeometrie“, in der die geometrischen Gebilde nicht bloß auf Grund ihrer rein logischen Definition existieren,



aber auch nicht in irgendeiner physischen Realität sich darstellen, sondern vermöge der in jedem von uns vorhandenen, mehr oder weniger entwickelten Kraft der räumlichen Anschauung sich unserem Geist „vorstellen“, und zwar als vollendete Idealisierungen, so daß auch diese Anschauungsgeometrie — für Kant noch die Geometrie schlechthin — insoweit Anspruch auf volle Exaktheit erheben darf, als sie der Kontrolle der Logik standhält. ... Diesem Anschauungsvermögen ist auch der nicht-euklidische Raum zugänglich.“

*Bachmann* (Marburg a. d. Lahn).

## Elementargeometrie:

**Manara, Carlo Felice:** *Vedute sulla geometria del triangolo*. Period. Mat., IV. s. 22, 145—157 (1942).

Kurze Übersicht der Dreiecksgeometrie. 1. Die projektivgeometrische Behandlungsweise. 2. Der Begriff: merkwürdiger Punkt. 3. Behandlung mittels der Gaußschen Zahlenebene. 4. Anwendung von Sätzen über Kegelschnitte. *O. Bottema* (Delft).

**Toscano, Letterio:** *Sui triangoli armonici*. An. Fac. Ci. Pórtó 28, 73—83 (1943).

R. Müller hat [Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 36, 1905; Mathesis, III. s. 6, 1906] jene Dreiecke untersucht, deren Umkreis und Feuerbachscher Kreis einander orthogonal schneiden. Verf. ergänzt diese Untersuchungen. Bei ihm werden die behandelten Dreiecke durch  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$  gekennzeichnet. Er beweist unter anderem, daß ein solches Dreieck  $D$  und das Dreieck  $H$  seiner Höhenfußpunkte gleichen Inhalt besitzen; daß der Umkreis von  $D$  und der um den Höhenschnittpunkt beschriebene Ankreis zu  $H$  gleiche Halbmesser haben; daß bei  $D$  der Lemoinesche und Taylorsche Kreis zusammenfallen.

*G. Hajós* (Budapest).

**Bouvaist, R.:** *Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les tangents aux trois côtés*. Bul. Politehn., București 13, 3—4 (1942).

Si  $\pi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont les puissances d'un point  $M$  par rapport à trois cercles donnés, le lieu de  $M$  tel que l'on ait la relation

$$\sum p_i \sqrt{\pi_i} = 0$$

$p_i$  étant des constantes, est une quartique bicirculaire  $k$ . Pour  $p_1 = p_2 = p_3 = 1$  et en prenant comme cercles les cercles exinscrits d'un triangle,  $k$  coupe le cercle des neuf points en quatre points; l'un d'eux est le point de contact de ce cercle avec le cercle inscrit.

*O. Bottema* (Delft).

**Tummers, J. H.:** *La droite de Wallace comme cas particulier d'un théorème plus général*. Mathematica, Zutphen B 12, 24—28 (1943).

Théorèmes sur les coniques, dont nous citons les suivants. Les projections du point  $P$  sur les côtés du triangle  $ABC$  et sur les droites de Frégier de  $P$  par rapport aux coniques du faisceau  $(P, A, B, C)$  se trouvent sur un cercle (nommé le cercle podaire de  $P$  relatif au triangle  $ABC$ ). Le cercle podaire passe par le centre de l'hyperbole équilatère qui passe par les points  $P, A, B, C$ . On peut former quatre triangles avec les points  $A, B, C, D$ ; les cercles podaires du point  $P$ , relatifs à ces quatre triangles, passent par un même point  $S$ , qui est la projection de  $P$  sur la droite de Frégier de  $P$ , relative à la conique qui passe par les points  $P, A, B, C, D$ . *O. Bottema* (Delft).

**Dehn, Max:** *Bogen und Sehnen im Kreis, Paare von Größensystemen*. Norske Vid. Selsk., Forh. 13, 103—106 (1941).

Ist  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n\alpha$  und sind nicht alle  $\alpha_i$  einander gleich, so gilt für die zu diesen Zentriwinkeln gehörenden Sehnen  $a_1 + \dots + a_n < na$ . Ist  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_m$  und  $\alpha_i > \beta_j$ , so gilt für die entsprechenden Sehnen  $a_1 + \dots + a_n < b_1 + \dots + b_m$ . Die elementaren Beweise gestatten es, einen Teil dieser Ergebnisse vom geometrischen Gewand zu befreien. Dadurch erscheinen der ersterwähnte Satz, der Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel und — wie Ref. bemerkt — die entsprechende Ungleichung für konvexe Funktionen als Sonderfälle desselben abstrakten Satzes.

*G. Hajós* (Budapest).



**Zacharias, Max:** Ein geometrischer Satz. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. **25**, 247—248 (1943).

Pompeiu hat (dies. Zbl. **27**, 237) den Satz bewiesen: Verbindet man in der Ebene eines geschlossenen polygonalen Streckenzuges, dessen Seiten sämtlich gleich lang sind, einen beliebigen Punkt mit den Mitten der Seiten, so kann man mit den erhaltenen Strecken immer einen anderen geschlossenen polygonalen Streckenzug bilden. Verf. zeigt in einfacher Weise, daß der Satz für einen Streckenzug mit einer geraden Seitenzahl auch dann richtig ist, wenn nicht alle Seiten dieselbe Länge besitzen.

O. Bottema (Delft).

**Baker, H. F.:** A remark on polygons. J. London Math. Soc. **17**, 162—164 (1942).

Ein neuer Beweis zur Konstruktion von B. H. Neumann [J. London Math. Soc. **16**, 236 (1941)], die ein beliebiges  $n$ -Eck mit Hilfe der  $n$ -ten Einheitswurzeln in ein reguläres  $n$ -Eck überführt. (Vgl. das folgende Referat.) L. Fejes (Koložsvár).

**Neumann, B. H.:** A remark on polygons. J. London Math. Soc. **17**, 165—166 (1942).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [J. London Math. Soc. **16**, 236 (1941)], sowie an H. F. Bakers oben referierten Aufsatz gibt Verf. einen einfachen Beweis folgender Konstruktion. Wir ordnen jeder Seite  $A_i A_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) des von den  $n$  beliebigen komplexen Zahlen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  bestimmten  $n$ -Ecks  $\mathcal{U}_1$  den Punkt  $A_{i+1} = (1 - c_1)A_i + c_1 A_{i+1}$  ( $n + 1 \equiv 1$ ) zu, wobei  $c_1$  eine komplexe Konstante bedeutet. Wenden wir dasselbe Verfahren auf das so erhaltene  $n$ -Eck  $\mathcal{U}_2 \equiv A_{12} A_{23} \dots A_{n1}$  mit einer anderen Konstanten  $c_2$  an und setzen dies fort, so erhalten wir eine Folge von  $n$ -Ecken. Setzen wir  $c_\nu = \frac{1}{1 - \varepsilon_\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n - 1$ ), wobei  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$  die von 1 verschiedenen  $n$ -ten Einheitswurzeln sind, so reduziert sich  $\mathcal{U}_n$  auf einen Punkt. Daraus schließt man leicht, daß  $\mathcal{U}_{n-1}$  regulär ist. L. Fejes (Koložsvár).

**Nyström, E. J.:** Das einfachste, bewegliche Polyeder. Eripainos Matemaattisten aineiden aikakauskirjasta. **2**, 29—35 (1942) [Finnisch].

Elementare Herleitung des (in bezug auf eine Gerade) symmetrischen, beweglichen Polyeders mit der geringsten Flächenzahl, das ein Bricardsches Oktaeder ist. Genaue Anweisungen zur Herstellung eines Modells. L. Pimiä (Helsinki).

**Brunngraber, Erna:** Über Punktgitter. Wien: Diss. 1944.

In der Arbeit wird das folgende Problem über Punktgitter behandelt: Die Endpunkte und die Gegenpunkte der von einem Punkt aus aufgetragenen Vektoren  $(a_1, \dots, a_n)$  bilden ein  $2^n$ -Zell (im  $R_3$  ein Oktaeder). Es werde vorausgesetzt, daß dieses  $2^n$ -Zell abgesehen vom Mittelpunkt und von den Eckpunkten gitterpunktfrei sei. Es fragt sich, welche Gitterpunkte das durch die Vektoren  $(a_1, \dots, a_n)$  erzeugte Parallelepipiped enthält. Diese Frage wird hier für  $n = 4$  vollständig beantwortet. Es gibt folgende Fälle: 1. Das Parallelepipiped ist gitterpunktfrei. 2. Der Mittelpunkt des Parallelepipipeds ist Gitterpunkt. 3. Das Parallelepipiped enthält zwei Gitterpunkte, a) sie sind Mittelpunkte gegenüberliegender Wände, b) sie liegen im Innern. 4. Das Parallelepipiped enthält vier Gitterpunkte, a) zwei sind im Innern und zwei sind Mittelpunkte gegenüberliegender Wände, b) alle vier liegen im Innern. Hofreiter (Braunschweig).

### Projektive Geometrie:

**Deaux, R.:** Sur l'involution quadratique. Mathesis **54**, 357—362 (1943).

Six éléments d'une forme binaire peuvent de quinze manières se répartir en trois couples. Lorsque ceux-ci appartiennent à une involution, la terne sera dit involutif. L'auteur étudie le nombre des ternes involutifs simultanées. Pour qu'il existe deux ternes involutifs n'ayant pas de couple commun, il faut et il suffit que les six éléments forment deux cycles d'une même projectivité. Si trois ternes sont involutifs et tels que deux quelconques d'entre elles n'ont pas de couple commun, il ne peut exister en



autre qu'une seule terne involutif et elle a un couple commun avec chacune des trois premières. Pour que quatre telles involutions existent, il faut et il suffit que les six éléments constituent un cycle d'une projectivité cyclique d'ordre six. L'auteur construit les seize points d'où les sommets d'un quadrilatère sont projetés suivant un tel cycle. *Bottema.*

**Richmond, Herbert W.:** On a chain of theorems due to Homersham Cox. J. Lond. Math. Soc. 16, 105—107 (1941).

L'auteur expose une chaîne de théorèmes récurrents alternés dus à Homersham Cox, dont l'importance et l'élégance n'ont pas été suffisamment remarquées. Il s'agit, pour chaque valeur positive de l'entier  $n$ , de former une configuration de  $2^{n-1}$  points,  $2^{n-1}$  plans, où les points jouent un rôle symétrique, ainsi que les plans, telle que chaque point appartienne à  $n$  plans, chaque plan contienne  $n$  points. La construction s'effectue par la chaîne alternée suivante, qui peut, si l'on n'y réfléchit pas assez, masquer la symétrie des points, et même leur nombre, et de même la symétrie des plans; il est bon aussi de remarquer la nature dualistique de la configuration. — Soit un point 0 fixe, dans l'espace à 3 dimensions, et  $n$  plans  $a_1, a_2, \dots, a_n$  issus de 0; sur la droite  $a_i, a_j$  on marque un point arbitraire  $a_i a_j$  autre que 0. Ces données initiales permettent de construire toute la configuration; les 3 points  $a_i a_j, a_i a_k, a_j a_k$  déterminent un plan  $a_i a_j a_k$ . Si l'on étudie le cas  $n = 4$ , et si l'on pose  $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$ , on constate que les quatre plans dont le symbole peut s'écrire  $\frac{P_4}{a_i} (i = 1, 2, 3, 4)$  concourent en un même point, que nous appelons  $a_1 a_2 a_3 a_4$ . Ce théorème est le seul qui ait besoin d'être démontré, car le raisonnement récurrent que nous allons indiquer permet d'atteindre toute valeur de  $n$ . Pour  $n = 5$ , posant  $P_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ , il s'agira de démontrer que les 5 points  $\frac{P_5}{a_i} (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  sont dans un même plan, que nous appelons  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ ; puis pour  $n = 6$ , posant  $P_6 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ , il s'agira de démontrer que les 6 plans  $\frac{P_6}{a_i} (i = 1, 2, \dots, 6)$  concourent en un même point que nous appelons  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ . Or d'une façon générale, si l'on a vérifié que les plans  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  conduisent à un point  $a_1 a_2 \dots a_{2n}$  ou  $P_{2n}$ , commun aux  $2n$  plans  $\frac{P_{2n}}{a_i}$ , on montre aisément, utilisant la symétrie constatée jusqu'à la valeur  $2n$  entre les points ou entre les plans de la configuration, qu'en passant aux  $(2n + 1)$  plans  $a_1, \dots, a_{2n+1}$ , le plan de trois quelconques des points  $\frac{P_{2n+1}}{a_i}$  contient l'un quelconque des autres; on a ainsi défini le plan  $a_1 a_2 \dots a_{2n+1}$ ; et alors, si on passe à  $(2n + 2)$  plans  $a_1, \dots, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ , on constate que le point commun à trois quelconques des plans  $\frac{P_{2n+2}}{a_i}$  est situé dans n'importe quel autre de ces plans, de sorte que, la vérification ayant été faite pour  $n = 4$ , elle est faite pour toutes les valeurs de  $n$ . — L'exposé de l'auteur est très élégant, mais on peut regretter qu'il n'ait pas mis assez en lumière l'exposé synthétique de la théorie qui s'applique à toute une série de configurations différentes, mais toutes régies par le raisonnement récurrent qui vient d'être indiqué. C'est d'ailleurs ce qui résulte de la lecture de l'article suivant. *B. Gambier.*

**Richmond, H. W.:** On a chain of theorems due to H. Cox. Addendum. J. Lond. Math. Soc. 16, 208 (1941).

Cet addendum, bien qu'il n'ait que 9 lignes, a une importance philosophique considérable, que l'auteur n'a d'ailleurs pas signalée. Le théorème de Cox, pour  $n = 4$ , donne la configuration bien connue de Möbius: deux tétraèdres  $ABCD, A'B'C'D'$  tels que chaque face de l'un contienne un sommet de l'autre,  $A$  par exemple étant dans  $B'C'D'$  et  $A'$  dans  $BCD$ . Les huit sommets sont bases d'un réseau de quadriques, admettant pour droites conjuguées les deux droites  $\Delta, \Delta'$  qui rencontrent  $AA', BB', CC', DD'$  et coupent d'ailleurs harmoniquement ces 4 segments. Si donc nous supposons que nous nous bornions à  $n = 4$  pour le théorème de Cox, les sept points 0,  $a_1 a_2, a_1 a_3, a_1 a_4, a_2 a_3, a_2 a_4, a_3 a_4$  conduisent au huitième point  $a_1 a_2 a_3 a_4$  commun à toutes les quadriques



les contenant; grâce à une homographie, on peut supposer que l'une des quadriques en jeu est une sphère  $S$  de sorte que, coupant  $S$  par les huit plans  $a_1, \dots, a_2a_3a_4, \dots$  de la configuration, on obtient sur  $S$  une configuration de 8 points et 8 cercles, telle que chaque point soit commun à 4 cercles et que chaque cercle contienne 4 points: c'est le théorème bien connu de Miquel et Clifford, du moins si l'on exécute sur le plan où sont les cercles de ce théorème une inversion dont le pôle est hors du plan. Si donc on se borne à  $n = 4$ , les deux théorèmes de Cox et Miquel sont équivalents; mais alors, le raisonnement récurrent que nous avons signalé d'après le premier article de l'auteur étend l'un et l'autre théorème à une valeur quelconque. Or beaucoup d'auteurs ont fait remarquer que le théorème de Miquel et Clifford est un cas particulier du théorème de Cox, relatif au cas où l'on aurait soin de figurer une quadrique  $Q$  issue de 0 et de prendre toujours  $a_i a_j$  au second point où la droite  $(a_i, a_j)$  perce de nouveau  $Q$ , de sorte que si le résultat de Cox est démontré, le résultat de Miquel et Clifford est obtenu, mais que, au contraire, si ce dernier résultat a été obtenu directement, celui de Cox n'est pas démontré. On peut remarquer que le raisonnement récurrent n'exige de vérifier la propriété que jusqu'à  $n = 4$ ; or, pour  $n = 4$ , les deux théorèmes coïncident; donc, qui a démontré l'un a démontré l'autre. Ceci peut être considéré comme un bel exemple d'une proposition mathématique que l'on peut regarder indifféremment comme fausse ou vraie. Toutes ces idées, bien que non explicitées par l'auteur, se dégagent de ses trois articles pour le lecteur qui sait les lire avec soin.

*B. Gambier (Paris).*

**Richmond, Herbert W.: A chain of theorems for lines in space.** J. Lond. Math. Soc. 16, 108—112 (1941).

L'auteur étudie une configuration analogue à la précédente: une droite orientée  $\vec{O}$  tourne autour d'un axe  $A_1$ , puis subit une translation parallèle à  $A_1$ ; elle engendre ainsi une congruence axiale, caractérisée par son axe  $A_1$ , son angle (angle  $\vec{O}, A_1$ ) et son rayon (plus courte distance de  $\vec{O}$  et  $A_1$ ); soit  $a_1$  cette congruence; si  $A_1, \dots, A_n$  sont  $n$  axes, et  $a_1, \dots, a_n$  les congruences axiales données par  $\vec{O}$ , les deux congruences  $a_i, a_j$  ont, en dehors de  $\vec{O}$ , une nouvelle droite orientée commune  $a_i a_j$ ; pour  $n = 3$ , les droites orientées  $a_i a_j, a_i a_k, a_j a_k$  appartiennent à une seule congruence axiale  $a_{ijk}$ . Cela posé, on démontre que, pour  $n = 4$ , les quatre congruences axiales  $\frac{P_4}{a_i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$ ) ont une droite commune  $a_1 a_2 a_3 a_4$ . Cela posé, on a la même chaîne que dans l'article précédent: on use des mêmes symboles que dans l'article précédent; les éléments pairs, au lieu d'être des points, sont des droites orientées; les éléments impairs, au lieu d'être des plans, sont des congruences axiales. Le raisonnement récurrent est identique et, du moment que la vérification est faite pour  $n = 4$ , le résultat est général. — Il s'agit donc de voir comment le résultat des congruences axiales est obtenu; pour cela on remarque que le théorème de Cox, pour  $n = 4$ , donne huit points bases d'un réseau ponctuel de quadriques: on peut alors supposer que l'une de ces quadriques est sphérique; or si  $(x, y, z)$  est un point de la sphère unité,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  un autre point de cette sphère, l'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ , où  $k$  est une constante, exprime que le point  $(x, y, z)$  décrit un cercle. Or une droite telle que  $\vec{O}$  peut être caractérisée par ses cosinus directeurs  $x, y, z$  et le moment  $(l, m, n)$ , du vecteur unité qu'elle porte, par rapport à l'origine  $\omega$  des coordonnées; si on introduit les nombres complexes  $A + B\varepsilon, C + D\varepsilon, \dots$  caractérisés par la propriété  $(A + B\varepsilon)(C + D\varepsilon) = AC + (AD + BC)\varepsilon$ , l'addition et la soustraction se faisant comme avec les nombres ordinaires, on voit que les nombres  $X = x + l\varepsilon, Y = y + m\varepsilon, Z = z + n\varepsilon$  satisfont à  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  et l'équation  $AX + BY + CZ = K$ , où  $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ , et où  $K$  est une constante, montre que la droite de coordonnées complexes  $X, Y, Z$  décrit une congruence axiale dont l'une a les coordonnées complexes  $A, B, C$ ; le cosinus de l'angle  $\theta$  de cette congruence est la partie réelle de  $K$ , tandis que le coefficient de  $\varepsilon$  dans  $K$  est égal au produit du rayon



de la congruence par  $\sin \theta$ . La propriété énoncée en congruences se traduit donc par les calculs de même forme que ceux qui prouvent le théorème de Cox sur une sphère ou le théorème de Miquel et Clifford sur les cercles d'une sphère. *B. Gambier* (Paris).

**Saddler, W.:** Polar properties and canonical forms. *J. Lond. Math. Soc.* **16**, 167—172 (1941).

Dans l'espace à 2 dimensions un triangle  $ABC$  et son triangle réciproque  $A'B'C'$  par rapport à une conique sont homologues,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  concourant en  $E$  et les points  $A_1 = (BC, B'C')$ ,  $B_1 = (CA, C'A')$ ,  $C_1 = (AB, A'B')$  étant alignés; les dix points ainsi obtenus forment la configuration bien connue de points répartis 3 par 3 sur une droite. Dans l'espace à 3 dimensions, un tétraèdre  $ABCD$  et son réciproque  $A'B'C'D'$  par rapport à une quadrique sont tels que  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  soient quatre génératrices d'une même semi-quadrique et réciproquement. L'auteur désire étendre ces propriétés au cas d'un espace à un nombre quelconque de dimensions; il se borne à un espace à 4 dimensions, la méthode s'étendant d'elle-même à un nombre quelconque de dimensions; il prend cinq points  $a, b, c, d, e$ , puis  $a'$  pôle, par rapport à la quadrique  $\Omega$ , de l'espace  $(bcde)$ ,  $b'$  pôle de  $(acde)$  . . . ;  $\Omega$  sera définie par son équation tangentielle. On reconnaît que si  $u_a = u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 + u_4a_4 + u_5a_5$  est l'équation tangentielle de  $a$ , et de même  $u_b, u_c, u_d, u_e$  celles de  $b, c, d, e$  on peut déterminer des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  telles que l'équation tangentielle de  $\Omega$  puisse être réduite à l'une des formes

$$(1) \quad \lambda u_a^2 + \lambda_1 u_b^2 + \lambda_2 u_c^2 + \lambda_3 u_d^2 + \lambda_4 u_e^2 + \lambda_5 u_f^2 = 0,$$

$$(2) \quad \lambda u_a^2 + \lambda_1 u_b^2 + \lambda_2 u_c^2 + \lambda_3 u_d^2 + \lambda_4 u_e^2 + \lambda_5 u_f^2 + \lambda_6 u_g^2 = 0,$$

$$(3) \quad \lambda u_a^2 + \lambda_1 u_b^2 + \lambda_2 u_c^2 + \lambda_3 u_d^2 + \lambda_4 u_e^2 + \lambda_5 u_f^2 + \lambda_6 u_g^2 + \lambda_7 u_h^2 = 0,$$

où  $f, g, h$  sont 3 nouveaux points convenablement choisis,  $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$  de nouvelles constantes. Ces trois cas correspondent respectivement aux trois seules hypothèses possibles: (1) cas où les deux pentaèdres sont homologues,  $f$  étant le point commun à  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$ ,  $ee'$ ; (2) cas où les droites  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$ ,  $ee'$  ont une transversale commune, réunissant les points  $f, g$ ; (3) cas général pour les deux pentaèdres réciproques. (A titre de mémoire, l'auteur aurait pu indiquer le cas, écarté ici, où  $abcde$  est à lui même son réciproque, de sorte que  $\Omega$  donne l'équation tangentielle  $\lambda u_a^2 + \lambda_1 u_b^2 + \lambda_2 u_c^2 + \lambda_3 u_d^2 + \lambda_4 u_e^2 = 0$ ,  $a'b'c'd'e'$  coïncidant avec  $abcde$ .) Dans le cas général, la variété quartique de Segre s'introduit naturellement. L'auteur traite la question analytiquement, bien qu'elle soit de nature essentiellement géométrique; pourtant la considération de quadriques harmoniquement inscrites ou circonscrites permettrait de présenter beaucoup de ces résultats sous une forme intuitive; l'auteur de cette analyse a d'ailleurs esquissé cette question dans un article paru au *Bull. Soc. Math. France* **64**, 174—196 (1936); ce *Zbl.* **16**, 71. *B. Gambier* (Paris).

**Kollros, Louis:** Démonstrations de formules de Steiner. *Comment. math. helv.* **16**, 60—64 (1943).

Es handelt sich um folgende Sätze: Man betrachte eine dem Dreieck  $ABC$  eingeschriebene bzw. umschriebene Ellipse; sind die Abstände des Ellipsenmittelpunktes von den Dreiecksseiten  $x, y, z$ , von den Verbindungsgeraden der Seitenmittelpunkte  $x', y', z'$ , ist ferner  $r$  der Umkreisradius von  $ABC$ , so gilt für den Inhalt  $E_i$  bzw.  $E_e$  der betrachteten Ellipsen  $E_i^2 = 4 \pi^2 r x' y' z'$ ,  $E_e^2 = \pi^2 r x^2 y^2 z^2 / x' y' z'$ . Steiner hat diese Sätze ohne Beweis angeführt (*Werke* **2**, 329—330). Verf. ergänzt sie durch die Formel  $E_p^2 = 2\pi^2 r x y z$ , welche den Inhalt der Ellipse angibt, falls  $ABC$  ihr Polardreieck ist, und gibt für sie zwei Beweise. Der zweite gestattet eine Verallgemeinerung der Sätze für Hyperbeln, wobei der Ellipseninhalte durch das mit den Hyperbelhalbachsen gebildete Produkt  $abx$  zu ersetzen ist. Es werden von Steiner stammende Anwendungen und ein Zusammenhang mit einem früheren Satze des Verf. (dies. *Zbl.* **26**, 422) erwähnt. *G. Hajós* (Budapest).



Neville, E. H.: The isoptic point of a quadrangle. J. Lond. Math. Soc. **16**, 173—174 (1941).

Die gemeinsamen Potenzen  $\Phi_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) der vier Grundkreise eines tetrazyklischen Koordinatensystems und die tetrazyklischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  genügen den Relationen

$$\begin{vmatrix} \Phi_{ik} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \Phi_{ik} & x_i \\ x_i & C \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus leitet Verf. Beziehungen für den Sonderfall ab, wo die vier Grundkreise durch je drei von vier Punkten laufen, und folgert die Existenz des Benettschen isóptischen Punktes, dessen Potenzen bezüglich der genannten Grundkreise zu ihren Inhalten proportional sind.

G. Hajós (Budapest).

Pimiä, Lauri: Über die linearen Kugelkomplexe bei der involutorischen Berührungstransformation T. Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr 16, 1—11 (1943).

Pimiä, Lauri: Die bei der involutorischen Berührungstransformation T invarianten Kugelscharen. Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr 21, 1—8 (1943).

In einer früheren Abhandlung (vgl. dies. Zbl. **27**, 243) hat Verf. involutorische lineare Transformationen der hyperkomplexen Geraden und ihre Einwirkungen auf den der Geraden zugeordneten Kugelraum untersucht. Dabei wurde gezeigt, daß die Gesamtheit der Doppelpunkte einer Involution im allgemeinen aus Punkten zweier zweidimensionalen Ketten zweiten Grades besteht, abgesehen von zwei ausgezeichneten Doppelpunkten  $\pi$  und  $\omega$ , die mit jedem Paar entsprechender Punkte der Involution auf einer einfachen Kette harmonisch liegen. In den zwei vorliegenden Arbeiten, die sich dieser Abhandlung unmittelbar anschließen, werden bezüglich Involutionen invariante lineare Kugelkomplexe und -scharen betrachtet. Die in bezug auf eine Involution invarianten Kugelkomplexe sind dadurch gekennzeichnet, daß sie entweder die Doppelkugeln  $\pi$  und  $\omega$  oder alle übrigen Doppelkugeln der Involution enthalten. Diese Kugelkomplexe bilden eine drei- bzw. ein-komplexparametrische Schar und je zwei Kugelkomplexe verschiedener Art stehen in involutorischer Beziehung zueinander. Ähnlich ist der Sachverhalt bei invarianten Kugelscharen, wobei jedoch die zwei auftretenden Scharen von drei- bzw. fünf komplexen Parametern abhängen. O. Borůvka (Brünn).

## Algebraische Geometrie:

Thalberg, Olaf M.: Some remarkable theorems concerning intersections of algebraic curves. Avh. Norske Vid. Akad., Oslo **1943**, 1—11 (Nr 4).

$O_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) seien die neun Basispunkte eines ebenen Büschels  $\mathfrak{C}$  von Kubiken. Betrachtet wird das Netz der Kurven  $K$  der Ordnung  $2n+6$  ( $n = 0, \dots, 4$ ) und des Geschlechts 2, die in  $O_9$  die Vielfachheit  $2n$ , in  $2n$  weiteren der  $O_i$  die Vielfachheit 4 und in den restlichen  $8-2n$  der  $O_i$  die Multiplizität 2 haben und durch einen weiteren beliebigen Punkt  $P$  gehen; sie haben dann einen (mit  $P$  verschiebbaren) weiteren Basispunkt  $Q$  gemein; die durch  $P'$  laufenden  $K$  haben einen (letzten) Schnittpunkt  $Q'$  gemein. Die Paare  $P, Q$  und analog  $P', Q'$  liegen auf der gleichen  $C^3$  aus  $\mathfrak{C}$  und bestimmen eine ebene Involution der Ordnung  $12n+17$  und Klasse  $4(n+1)$ ;  $n=0$  führt zur symmetrischen Involution von Bertini. Weiter gibt Verf. ähnliche Sätze an, bei denen an die Stelle der  $C^3$  rationale Kurven treten. Sind z. B. auf einer  $C^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) mit dem  $(n-1)$ -fachen Punkt  $O$   $T_i$  ( $i = 1 \dots 2n$ ) die Berührungspunkte der Tangenten durch  $O$  an  $C^{n+1}$ , dann schneiden sich die  $\infty^{n-2} C^n$ , die  $(n-2)$ -fach durch  $O$  und einfach durch alle  $T_i$  sowie einen weiteren Punkt  $P$  gehen, in einem weiteren Punkte  $Q$  der Geraden  $OP$ ; die entsprechende Involution der Paare  $PQ$  ist die Jonquières-Involution mit dem Zentrum  $O$  und der Koinzidenzkurve  $C^{n+1}$ . Eine Verallgemeinerung erhält man folgendermaßen: Auf einer  $C^{2n+1}$  ( $n \geq 2$ ) durch  $O_i^n$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), d. h. mit den  $n$ -fachen Punkten  $O_i$ , seien  $T_k$  ( $k = 1, \dots, 2n+2$ ) die Berührungspunkte der  $2n+2$  durch  $O_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) gehenden  $C^2$ , deren zwei weitere Schnittpunkte mit  $C^{2n+1}$  (eben



in  $T_k$ ) zusammenfallen,  $A_l (l = 1, 2, 3)$  seien die Doppelpunkte der drei zerfallenden durch  $O_i (i = 1, \dots, 4)$  gehenden  $C^2$ ; dann laufen die  $\infty^{n-1}$  durch  $O_1^n \dots O_4^n T_1^1 \dots T_{2n+2}^1 A_1^1$  gehenden  $C^{2n+1}$  auch durch  $A_2, A_3$ ; die durch einen weiteren Punkt  $P$  gehenden dieser Kurven treffen sich dann in einem weiteren Punkt  $Q$ , so daß  $O_1, \dots, O_4, P, Q$  auf einer  $C^2$  liegen. Weitere ähnliche Sätze.

Harald Geppert (Berlin).

Arvesen, Ole Peder: Courbes de Chasles supérieures. Norske Vid. Selsk., Forh. **14**, 123—126 (1942).

Die Arbeit knüpft inhaltlich an eine frühere (dies. Zbl. **26**, 146) an. Eine ebene algebraische Kurve  $\Gamma$  der Klasse  $m$  mit  $r$  Tangenten im Unendlichen hat in homogenen Linienkoordinaten die Gleichung  $(1) w^{m-r} \varphi_r(u, v) + w^{m-r-1} \varphi_{r+1}(u, v) + \dots + \varphi_m(u, v) = 0$  [ $\varphi_i$  = Form  $i$ -ten Grades]. Sind  $w_i (i = 1 \dots m - r)$  die Wurzeln der Gleichung  $(1)$ ,  $n$  eine positive ganze Zahl, so bezeichnet Verf. die Kurven  $(2) (m - r) w^n = \sum_{i=1}^{m-r} w_i^n$

als höhere Chaslessche Kurven  $s_n$ ;  $s_1$  ist die übliche Chaslessche Kurve von  $\Gamma$ .  $s_n$  ist nicht, wie  $s_1$ , mit  $\Gamma$  invariant verknüpft. Man kann aber zu einer invarianten  $s_n$  von  $\Gamma$  dadurch gelangen, daß man zu  $\Gamma$  die erzeugende Kurve (s. obiges Referat)  $II$  sucht, deren  $s_1$  sich definitionsgemäß auf einen Punkt  $O$  reduziert, diesen als Nullpunkt wählt und die geometrische Summe (vgl. Verf. dies. Zbl. **26**, 147) der  $s_1$  von  $\Gamma$  und der  $s_n$  von  $II$  bezüglich  $O$  bildet. Die  $s_2$  einer Kurve ist i. a. eine  $II$ -Kurve, die  $s_2$  einer  $II$ -Kurve ohne Tangenten im Unendlichen ist ein Mittelpunktskegelschnitt. Einige Sätze über die  $s_2$  von Kegelschnitten.

Harald Geppert (Berlin).

Godeaux, Lucien: Sur les involutions cycliques régulières appartenant à une surface irrégulière. Bull. Sci. math., II. s. **67**, 145—158 (1943).

Verf. hat in Fortführung der Untersuchungen von G. Humbert über hyperelliptische Flächen in früheren Arbeiten gezeigt, daß eine irreguläre algebraische Fläche, die eine reguläre Involution zweiter Ordnung mit nur endlichvielen Deckpunkten trägt, das Bild einer deckpunktfreien Involution zweiter Ordnung auf einer Fläche der gleichen Irregularität ist. Vorliegende Arbeit erweitert dieses Ergebnis auf zyklische Involutionen höherer Ordnung und beweist den Satz: Enthält eine algebraische Fläche der Irregularität  $q > 1$  eine reguläre zyklische Involution von Primzahlordnung  $p$  mit nur endlichvielen Deckpunkten, so ist sie das Bild einer deckpunktfreien zyklischen Involution der gleichen Ordnung  $p$  auf einer andern algebraischen Fläche mit der Irregularität  $\geq q$ .

Harald Geppert (Berlin).

Gauthier, Luc: Sur certaines variétés cubiques rationnelles sans point double. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 435—437 (1943).

Enthält eine  $V_{2n}^3$  des  $S_{2n+1}$  Mannigfaltigkeiten  $V_n^{n+2}$  oder  $V_n^{2n+1}$  oder  $V_n^{2n}$ , die als Schnitte einer Segre- $V_{n+1}^{n+1}$  mit einer  $V_{2n}^2$ , welche durch eine  $V_n^n$  oder einen oder zwei  $S_n$  dieser Segremannigfaltigkeit gehen, entstehen, so ist sie rational, ohne Doppelpunkte zu besitzen. Leider sind die so erhaltenen  $V_{2n}^3$  nur im Falle  $n = 1$ , d. h. der kubischen Fläche, die allgemeinsten. Der Fall  $n = 2$ , in dem die  $V_n^{n+2}$  und  $V_n^{2n}$  zu Regel- $V_4^2$  werden, wurde von Morin (dies. Zbl. **24**, 173) untersucht, der fälschlich annahm, daß es sich dabei um die allgemeinste  $V_4^3$  handle (vgl. dazu auch G. Fano, dies. Zbl. **27**, 131). Verf. zeigt diesen Fehlschluß auf durch den Nachweis, daß eine  $V_4^3$ , die eine Regel- $V_4^2$  enthält, deren gleich  $\infty^2$  (und nicht  $\infty^1$ ) enthalten muß. Gibt es auf einer  $V_4^3$  zwei  $V_4^2$  mit  $n (1 \leq n \leq 9)$  gemeinsamen Punkten, so liegen auf  $V_4^3$  zwei zweiparametrische Systeme solcher  $V_4^2$  und zwei fünfparametrische Systeme von  $V_2^5$ .

Harald Geppert (Berlin).

Finsler, Paul: Reelle Freigeilde. Comment. math. helv. **16**, 73—80 (1943).

Die wichtigsten Sätze aus der Arbeit des Verf. über eindimensionale Freigeilde (dies. Zbl. **23**, 160) werden auf reelle Freigeilde übertragen. Dabei heißt ein Freigeilde reell, wenn es mit dem konjugiert komplexen zusammenfällt und seine reellen Punkte nicht in einem Raum geringer Dimension enthalten sind als die komplexen. Sodann wird bewiesen: Wird ein zum Raum  $L_q$  gehöriges reelles Frei-



gebilde  $G$  von einer Hyperfläche 2. Grades in  $\varrho + 1$  linear unabhängigen reellen Punkten getroffen und nicht durchsetzt, so ist es ganz in ihr enthalten. Der wichtigste Hilfssatz heißt: Jeder nichtreelle Punkt  $P$  eines reellen Freigebildes  $G$  gehört einer in  $G$  enthaltenen reellen Freikurve an. *van der Waerden* (Leipzig).

### Kinematik:

**Hackmüller, E.:** Die Ermittlung von Koppeltrieben aus zwei Kurbel-Schubkurventrieben. Ing.-Arch. 14, 141—154 (1943).

Lösung der folgenden grundlegenden Aufgabe der Getriebemaßsynthese: Es sind solche Gelenkvierecke (Koppeltriebe) zu bestimmen, von denen ein Punkt ihrer Koppel-ebene eine Bahnkurve beschreibt, die in vier Punkten mit einem gegebenen Kurvenstück zusammenfällt, und für die die zugehörigen vier Richtungen der einen Antriebskurbel vorgeschrieben sind. Diese Aufgabe wird auf die folgende zurückgeführt: Solche Kurbel-Schubkurventriebe zu bestimmen, deren Kurbel vier vorgegebene Lagen einnimmt, während ein Punkt ihrer Koppel-ebene die vier gegebenen Punkte durchläuft. Aus zweien solcher Kurbel-Schubkurventriebe können sodann in einfacher Weise Koppeltriebe ermittelt werden, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen. Das allgemeine Verfahren wird an einem besonderen Beispiel im einzelnen durchgeführt. Als Hilfsmittel werden in einfacher Weise komplexe Koordinaten in der festen Bezugsebene und den bewegten Ebenen der Getriebe verwendet, die sich für die Durchführung der Beweise und zur Veranschaulichung der Beziehungen als sehr vorteilhaft erweisen.

*Th. Pöschl* (Karlsruhe).

**Wunderlich, Walter:** Zur Triebstockverzahnung. Z. angew. Math. Mech. 23, 209 bis 212 (1943).

Bei der Triebstockverzahnung ist die eine Zahnflanke als Kreis mit dem Mittelpunkt auf einem Teilkreis vorgeschrieben. Eine genauere Untersuchung der zu diesem gehörigen zweiten Zahnflanke zeigt, daß von dieser für den Eingriff ein kleines Stück verloren geht, das eine Spitze enthält und in das Innere jenes Triebstockkreises fällt. Dadurch entsteht ein Fehler, der an sich sehr klein ist und in dieser Arbeit zahlenmäßig angegeben wird. Er kann dadurch ausgeschaltet werden, daß die Mittelpunkte der Triebstöcke um ein kleines Stück nach innen verschoben werden, dessen Größe von den Halbmessern der Teilkreise und der Triebstöcke abhängt. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Scherrer, W.:** Eine Formel für die geodätische Krümmung. Comment. math. helv. 16, 101—104 (1943).

Zwischen der geodätischen Krümmung  $x_g$  einer Kurve auf einer Fläche im  $R_3$ , der geodätischen Krümmung  $x_\gamma$  ihres sphärischen Bildes und dem Winkel  $\omega$  im positiven Sinne zwischen den Tangenten von Kurve und sphärischem Bild besteht die Beziehung

$$x_g = \omega' + \varepsilon x_\gamma \sigma',$$

wo  $\varepsilon$  das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung, der Strich Differentiation nach der Bogenlänge und  $\sigma$  die Bogenlänge des sphärischen Bildes bedeutet. Haben Kurve und sphärisches Bild Ecken, so gilt für die zugehörigen Drehwinkel der Tangenten entsprechend

$$\varphi_g > -\Delta\omega + \varepsilon \varphi_\gamma.$$

Durch Integration folgt sehr einfach die Gauß-Bonnetsche Integralformel ohne Eckenabrundung für beliebige stückweise glatte geschlossene Kurven, wenn man sie auf der Kugel, — wo sie sich ja leicht bestätigen läßt — als bekannt voraussetzt.

Für Streifen kann man  $\varepsilon = 1$  setzen und erhält für jeden zweiseitigen geschlossenen Streifen

$$\oint x_g ds > 2k\pi + \int x_\gamma d\sigma$$



mit ganzem  $k$ . Ist der Streifen geodätisch, so folgt der Satz von Jacobi, nach dem das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Raumkurve die Kugel in zwei gleiche Teile teilt.

Bol (Greifswald).

**Charrueau, André:** Sur les surfaces représentatives des fonctions harmoniques. 1. Bull. Sci. math., II. s. 67, 168—176 (1943).

**Charrueau, André:** Sur les surfaces représentatives des fonctions harmoniques. 2. Bull. Sci. math., II. s. 67, 179—187 (1943).

1. — Soient  $(Ox, y, z)$  un système d'axes trirectangulaires, les surfaces  $S_1, S_2$   $z_1 = P(x, y)$ ,  $z_2 = Q(x, y)$  où  $P + iQ$  est fonction analytique de  $x + iy$ . Les asymptotiques de  $S_1$  (ou  $S_2$ ) se projettent sur  $xOy$  suivant un réseau orthogonal, les projections de deux directions conjuguées ont pour bissectrices les projections des asymptotiques; les projections des directions asymptotiques de chaque surface en deux points  $A_1$  de  $S_1$  et  $A_2$  de  $S_2$ , ayant pour projection un même point  $a$  de  $xOy$ , sont les bissectrices des projections de l'autre; par rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $Oz$ , la demi-normale positive à  $S_1$  en  $A_1$  devient parallèle à la demi-normale positive à  $S_2$  en  $A_2$  et de même sens. Tout dièdre droit dont l'arête est  $aA_1A_2$  est coupé par les plans tangents à  $S_1$  en  $A_1$  et à  $S_2$  en  $A_2$  suivant les côtés de deux angles supplémentaires. Les courbes de niveau de  $S_1$  et  $S_2$  se projettent sur  $xOy$  suivant deux familles orthogonales. Deux portions de  $S_1, S_2$  ayant même projection sur  $xOy$  ont même aire. Les courbures totales de  $S_1$  et  $S_2$  en deux points correspondants  $A_1, A_2$  sont égales. Les quatre centres de courbure, au point  $a$ , des projections des deux lignes asymptotiques de  $S_1$  passant en  $A_1$  et des deux lignes asymptotiques de  $S_2$  passant par  $A_2$  sont en ligne droite. Les lignes asymptotiques de chaque surface, projetées parallèlement à  $Oz$  sur l'autre, forment un réseau conjugué. L'auteur considère ensuite une courbe  $C_1$  de  $S_1$ , une courbe  $C_2$  de  $S_2$  ayant même projection  $C$  sur  $xOy$  et établit des relations simples, pour tout couple de points correspondants  $A_1, A_2$  entre les courbures normales ou géodésiques ou les torsions géodésiques des dites courbes: il étudie ensuite les cas spéciaux où  $C_1$  est ligne de courbure de  $S_1$  ou ligne asymptotique, ou ligne géodésique, ou ligne de niveau, ou ligne de plus grande pente. Si  $C_1, C_2$  sont fermées et sans point anguleux, les intégrales  $\int ds_1: \varrho_1$  et  $\int ds_2: \varrho_2$  étendues à ces courbes sont égales,  $s_1, s_2$  étant les arcs et  $\varrho_1, \varrho_2$  les rayons de courbure géodésique. Appelons  $C'_1, S'_1$  la courbe et la surface provenant de  $C_1$  et  $S_1$  par rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $Oz$ :  $C'_1$  et  $C_2$  ont même représentation sphérique si l'on fait correspondre les points qui, avant la rotation, avaient la même projection sur  $xOy$ .

2. — Soient:  $C_1, C'_1$  deux lignes asymptotiques de  $S_1$  se coupant en  $A_1$ ;  $C_2, C'_2$  les projections parallèlement à  $Oz$  de  $C_1$  et  $C'_1$  sur  $S_2$ ;  $A_1t_1, A_1t'_1, A_2t_2, A_2t'_2$  les demi-tangentes positives en  $A_1$  ou  $A_2$  de ces courbes; soit  $\psi$  l'angle, compris entre 0 et  $\pi$ ,  $(A_1t_1, A_1t'_1)$ : on a  $(A_2t_2, A_2t'_2) = \pi - \psi$ . Si  $T_1$  et  $-T_1$  sont les torsions de  $C_1$  et  $C'_1$  en  $A_1$ , et  $R_2, R'_2, T_2, T'_2$  les rayons de courbure normale ou de torsion géodésique de  $C_2, C'_2$  en  $A_2$ , on a  $R_2: T_2 = -R'_2: T'_2 = \cot \psi$ . Nous appelons  $p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, p_2, \dots$  les dérivées premières et secondes en  $x, y$  des fonctions  $z_1, z_2$ ;  $A_1, B_1, C_1$  étant des constantes arbitraires, soit  $S'_1$  la surface définie par le point  $(X_1, Y_1, Z_1)$  avec

$$\begin{aligned} dX_1 &= p_1(q_1 - A_1)dx + [\tfrac{1}{2}(q_1^2 - p_1^2) - A_1q_1 + C_1]dy, \\ dY_1 &= [\tfrac{1}{2}(q_1^2 - p_1^2) - B_1p_1 - C_1]dx - (p_1 + B_1)q_1dy, \\ dZ_1 &= -(q_1 - A_1)dx + (p_1 + B_1)dy \end{aligned}$$

et  $S'_2$  la surface définie par des formules semblables

$$\begin{aligned} dX_2 &= (p_1 + A_2)q_1dx + [\tfrac{1}{2}(q_1^2 - p_1^2) - A_2p_1 + C_2]dy, \\ dY_2 &= [\tfrac{1}{2}(q_1^2 - p_1^2) + B_2q_1 - C_2]dx - p_1(q_1 + B_2)dy, \\ dZ_2 &= (p_1 + A_2)dx + (q_1 + B_2)dy; \end{aligned}$$

les surfaces  $S_1$  et  $S'_1$  se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires; de même  $S_2$  et  $S'_2$ ;  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, Z_1, Z_2$  sont des fonctions harmoniques de  $x$  et  $y$ . Un cas spécial intéressant s'obtient en prenant  $A_1 = B_1 = C_1 = A_2 = B_2 = C_2 = 0$  de façon à avoir  $X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, Z_1 = z_2, Z_2 = z_1$ . En nous bornant dans ce qui suit à ce cas, on a alors

$$dX_1 = p_1q_1dx + \tfrac{1}{2}(q_1^2 - p_1^2)dy, \quad dY_1 = \tfrac{1}{2}(q_1^2 - p_1^2)dx - p_1q_1dy,$$

$dZ_1 = -q_1dx + p_1dy, dZ_2 = p_1dx + q_1dy$ . Les projections sur le plan des  $x, y$  des normales aux surfaces  $S_1$  et  $S'_1$  en deux points homologues  $(x, y, z_1)$  et  $(X_1, Y_1, Z_1)$  sont parallèles; les tangentes en ces points aux lignes de niveau de  $S_1$  et  $S'_1$  sont parallèles.  $Z_2 + iZ_1, Y_1 + iX_1$  sont des fonctions de  $x + iy$ ;  $Z_1 + iZ_2$  de  $X_1 + iY_1$ ; ainsi, de même que  $S_1, S_2$  sont deux

surfaces représentatives de deux fonctions harmoniques conjuguées de  $x$  et  $y$ , de même  $S'_1, S'_2$  sont deux surfaces représentatives de deux fonctions harmoniques conjuguées de  $X_1$  et  $Y_1$ . Les tangentes aux lignes de niveau  $z_1 = Z_2 = \text{const}$  de  $S_1$  et de  $S'_2$  aux points  $(x, y, z_1)$  et  $(X_1, Y_1, Z_2)$  sont perpendiculaires; de même pour  $S_2, S'_1$ . Quand  $(x, y, z_1)$  décrit une ligne de niveau de  $S_1$  ou une ligne de plus grande pente,  $(X_1, Y_1, Z_1)$  décrit respectivement une ligne de plus grande pente ou de niveau de  $S'_1$ ; de même pour  $S_2, S'_2$ . Quand  $(x, y, z_1)$  décrit une asymptotique de  $S_1$ , le point  $(X_1, Y_1, Z_2)$  décrit une asymptotique de  $S'_2$ ; de même pour  $S_2$  et  $S'_1$ . Si l'on projette parallèlement à  $Oz$  les asymptotiques de  $S'_2$  sur  $S'_1$  (ou de  $S'_1$  sur  $S'_2$ ), on a un réseau conjugué tel que la tangente à chacune des deux courbes, en tout point, est orthogonale à une direction asymptotique de  $S_1$  (ou de  $S_2$ ) au point homologue. La transformation qui remplace les points  $(x, y)$  par les points  $(X_1, Y_1)$  dans le plan des  $x, y$  est une représentation conforme inversant le sens des angles: on a, en effet,

$$X_1 - i Y_1 = f(\zeta), \quad \zeta = x + i y, \quad \frac{df}{d\zeta} = p_1 q_1 + \frac{i}{2} (p_1^2 - q_1^2) = \frac{i}{2} \left( \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)^2, \quad \varphi(\zeta) = z_1 + i z_2.$$

A un point  $(x, y)$  correspond un seul point  $(X_1, Y_1)$ ; mais à un point  $(X_1, Y_1)$  correspondent, en général, en vertu des relations qui viennent d'être écrites, plusieurs points  $(x, y)$  dont le nombre sera désigné par  $n$ . Si l'on considère d'abord la surface  $S_1$ , on voit qu'on obtient, en plus de  $S'_1$ ,  $(n-1)$  surfaces  $S'_1, S'_1'', \dots$  analogues à  $S'_1$ ; chacune de ces  $n$  surfaces correspond à  $S_1$  avec orthogonalité des éléments linéaires. B. Gambier (Paris).

**Meiners, Emilie: Der Darbouxsche Flächenkranz im Bereich der allgemeinen projektiven Abbildungen.** Aachen: Diss. 1939 (1941). 43 S. u. 5 Abb.

Beim Studium der infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche entdeckte Darboux (Théorie des surfaces IV (1896) 48 ff) den nach ihm benannten Kranz von zwölf Flächen, die untereinander in vielfältiger Weise zusammenhängen. In ihm sind neben der Ausgangsfläche  $\mathfrak{x}(u, v)$  und dem dazu assoziierten Drehriß  $\eta$  der infinitesimalen Verbiegung  $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{x} + \varepsilon \bar{\mathfrak{x}}$  noch die auf  $\mathfrak{x}$  durch orthogonale Tangenten bezogene Fläche  $\bar{\mathfrak{x}}$  und (da auch  $\mathfrak{x}$  Drehriß einer infinitesimalen Biegung  $\eta^* = \eta + \varepsilon \bar{\eta}$  von  $\eta$  ist) auch die auf  $\eta$  orthogonal bezogene Fläche  $\bar{\eta}$  enthalten, die man mit R. Sauer [Math. Ann. **111**, 71—82 (1935); dies. Zbl. **10**, 374; Projektive Liniengeometrie, Berlin-Leipzig 1937; dies. Zbl. **16**, 218] als Schiebriß der infinitesimalen Biegung von  $\mathfrak{x}$  deuten und mit  $\eta$  zu ihrem Schraubriß  $(\eta, \bar{\eta})$  zusammenfassen kann.  $\bar{\mathfrak{x}}$  und  $\bar{\eta}$  sind Brennflächen eines  $W$ -Systems, d. h. auf ihnen entsprechen sich konjugierte Kurvennetze.

Die Tangentialebenen  $\mathfrak{x}\xi + 1 = 0$  von  $\mathfrak{x}$  und  $\eta\eta + 1 = 0$  von  $\eta$  liefern durch die Ortsvektoren  $\xi$  und  $\eta$  zwei neue Flächen des Darbouxschen Kranzes, die Polarflächen von  $\mathfrak{x}$  und  $\eta$ .  $\xi$  ist zu  $\bar{\eta}$  und  $\eta$  zu  $\bar{\mathfrak{x}}$  assoziiert. Die sechs Flächen  $\mathfrak{x}, \eta, \bar{\mathfrak{x}}, \bar{\eta}, \xi, \eta$  bilden die eine Hälfte des Kranzes, den man, beginnend mit zwei auf  $\xi$  und  $\eta$  orthogonal bezogenen Flächen  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  und zwei zu  $\bar{\mathfrak{x}}$  und  $\bar{\eta}$  polaren und zu  $\bar{\eta}$  und  $\bar{\xi}$  assoziierten Flächen  $A, B$  endlich durch zwei zu  $A$  und  $B$  orthogonalbezogenen Flächen  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ , die untereinander assoziiert sind, schließen kann.

Es ist R. Sauer a. a. O. der Nachweis gelungen, daß sich aus dem Schraubriß  $(\eta, \bar{\eta})$  einer infinitesimalen Biegung der Fläche  $\mathfrak{x}$  für jede zu  $\mathfrak{x}$  kollineare Fläche  $\tilde{\mathfrak{x}}$  der Schraubriß  $(\tilde{\eta}, \tilde{\bar{\eta}})$  einer ebensolchen Biegung von  $\tilde{\mathfrak{x}}$  dadurch gewinnen läßt, daß man die sechs Schraubenkoordinaten  $(\eta, \bar{\eta})$  und die Linienkoordinaten der Flächentangenten von  $\mathfrak{x}$  derselben linearen Transformation mit konstanten Koeffizienten unterwirft. Damit sind bei der infinitesimalen Flächenbiegung metrische und projektive Geometrie in einen bemerkenswerten Zusammenhang gesetzt.

Diesen Zusammenhang dehnt die vorliegende, von R. Sauer angeregte Dissertation auf die zwölf Flächen des Darbouxschen Kranzes aus und gewinnt dadurch die Möglichkeit, einen Darbouxschen Flächenkranz in einen anderen zu transformieren. Dabei werden i. a. aber nur die vier Flächen  $\mathfrak{x}, \xi, \bar{\eta}, \bar{B}$  des Kranzes projektiv transformiert, die übrigen nur, wenigstens teilweise, in Sonderfällen. — Als Beispiel werden hauptsächlich die projektiven Transformationen eines Darbouxschen Flächenkranzes studiert, für die eine Drehfläche  $\mathfrak{x}$  Ausgangsfläche ist, wobei die infinitesimale Biegung so gewählt ist, daß wieder eine Drehfläche entsteht. Strubecker (Straßburg).



**Vincensini, Paul:** Sur les courbes de Ribaucour et sur les réseaux conjugués géodésiques. Ann. École norm., III. s. 60, 17—34 (1943).

Dans un Mémoire précédent (ce Zbl. 27, 344) l'au. a étudié les surfaces  $(A)$ , enveloppes de sphères à 1 paramètre, telles que, si  $M, N$  sont deux centres de courbure principaux associés, le point  $I$  du segment  $MN$  tel que  $\overline{IM} : \overline{IN} = K$ , où  $K$  est une constante donnée, décrive un plan  $\Pi$  dénommé plan de base de  $(A)$ . Le Mémoire cité étudie surtout le cas  $K = -1$ . Le Mémoire actuel étudie en détail le cas général ( $K \neq -1$ ). Si le rayon  $R$  de la sphère mobile reste constant, la déférente  $C$  (lieu des centres des sphères) est une courbe plane, telle que son centre de courbure divise dans un rapport constant le segment de la normale limité à la courbe et à une droite fixe  $\delta$  (courbe dite de Ribaucour). Si le rayon  $R$  est variable, on prend le plan de base  $\Pi$  pour plan  $xOy$ ; la courbe  $C$  est plane et dans un plan perpendiculaire à  $\Pi$ , que l'on peut prendre comme plan  $xOz$ , et alors la courbe  $C(x, 0, z)$  est définie par  $x = aR = a \int \left( \lambda z^{\frac{2K}{1-K}} + 1 - a^2 \right)^{-\frac{1}{2}} dz$ ;  $\lambda$  est une constante d'homothétie, et  $a$  est une nouvelle constante arbitraire;  $a$  et  $K$  sont, pour la surface  $(A)$ , deux paramètres de forme. Il y a maintenant trois cas à distinguer,  $a > 1$ ;  $a < 1$ ;  $a = 1$ . Si  $a > 1$ , l'ensemble des déférentes  $C$ , relatives aux diverses valeurs de  $K$  est fourni par l'ensemble des projections orthogonales des différentes courbes de Ribaucour sur les divers plans issus de leur base; le plan sur lequel on projette la courbe de Ribaucour fait avec le plan de la courbe un angle  $\theta$  dont le sinus est égal à  $1/a$ . Dans le cas  $a < 1$ , en soumettant les courbes de Ribaucour à une homologie affine orthogonale multipliant les abscisses ( $x$ ) par un facteur imaginaire pur, on en déduit les déférentes  $C$  des surfaces  $(A)$  actuelles: les courbes  $C$  ne sont autre chose que les transformées (réelles) par l'homologie affine en jeu des arcs de courbes de Ribaucour d'ordonnée ( $\zeta$ ) réelle et d'abscisse ( $x$ ) imaginaire pure. Pour le cas  $a = 1$ , la déférente  $C(x, 0, z)$  est définie par l'équation  $x^{K-1} = z^{2K-1}$ ; ce résultat prouve que toute courbe  $x = z^\alpha$  peut être considérée comme déférente d'une surface  $(A)$  de deux façons différentes, car on peut échanger les rôles de  $x$  et  $z$  en changeant  $\alpha$  en  $1/\alpha$ ; les valeurs de  $K, K_1$  relatives à ces deux modes sont liées par la relation  $3KK_1 = K + K_1$ ; le cas spécial  $K = K_1 = \frac{2}{3}$  donne pour  $C$  une hyperbole équilatère,  $(A)$  étant l'enveloppe d'une sphère centrée sur  $C$  et tangente à une asymptote. — L'au. termine par la détermination des surfaces  $\Theta$  admettant un réseau conjugué formé de courbes deux à deux homothétiques et de géodésiques; les courbes en question sont des coniques; la solution générale s'obtient en prenant, dans un plan  $\Pi$ , une courbe quelconque  $C$  et une droite également quelconque  $D$ ; une sphère variable  $S$ , dont le centre  $M$  décrit  $C$ , et dont le rayon  $R$  varie proportionnellement à la distance de  $M$  à  $D$ , enveloppe une certaine surface  $B$ ; la surface  $\Theta$  la plus générale est la nappe, autre que  $C$ , de la développée de  $B$ ; l'au. détermine ensuite les surfaces ayant un réseau conjugué formé par une famille de géodésiques et d'autre part des coniques dont les plans ou bien sont parallèles à une droite fixe, ou bien passent par un point fixe, ou bien passent par une droite fixe. — Le travail est rédigé avec l'élégance coutumière à l'auteur.

B. Gambier (Paris).

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Hjelmslev, Johannes:** Beispiele für geometrische Untersuchungen über Integralkurven im Raum. Festschr. Prof. J. F. Steffensen 66—71 (1943) [Dänisch].

Es werden im projektiven Raum solche Kurven konstruiert, deren sämtliche Tangenten eine gegebene Leitkurve treffen bzw. eine Leitfläche berühren. Dazu werden die Integralkurven im Nullsystem untersucht.

Pimiä (Helsinki).

**Bottema, O.:** Über die Differentialgeometrie der Regelflächen im  $R_4$ . 15. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 52, Nr 5, 201—206 u. dtsch. Zusammenfassung 206 (1943) [Holländisch].

In der 14. Mitteilung (dies. Zbl. 28, 89) hat Verf. die von R. Weitzenböck und

Bos entwickelte projektive Differentialgeometrie der Regelflächen des  $R_4$  auf jene speziellen Regelflächen vierter Ordnung angewandt, welche eine Torsallinie besitzen. Die vorliegende Note wendet sich dem Falle der allgemeinen Regelfläche vierter Ordnung zu, die als Erzeugnis zweier projektiver Kegelschnitte dargestellt wird.

Strubecker (Straßburg).

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Debever, Robert: Sur quelques problèmes de géométries dérivées du calcul des variations. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 28, 794—808 (1942).

Im  $n$ -stufigen Raume der  $z^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) wird das Integral

$$J = \int f(z^i, p_i) dt^1 \dots dt^{n-1}, \quad p_i = (-1)^{i+1} \frac{\partial(z^1, \dots, z^{i-1}, z^{i+1}, \dots, z^n)}{\partial(t^1, \dots, t^{n-1})}$$

über ein Stück  $H$  der Überfläche mit den Parametern  $t^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n-1$ ) erstreckt und bei passenden Eigenschaften der Grundfunktion  $f$  der Variation unterworfen. Verf. erörtert in diesem parametrischen Falle eine Verwandlung der  $2n+1$  Funktionen  $f, p_i, f^i = \partial f / \partial p_i$  in andre  $F, P^i, F_i$ , die im nicht-parametrischen Falle Carathéodory behandelt hat (Acta Szeged 4, 193—216 (1929)). Dem Integral  $J$  ordnet er ein zweites zu,

$$K = \int F(z^i, P^i) dt, \quad P^i = \frac{dz^i}{dt} = \dot{z}^i,$$

— das ergänzende Integral. — Cartan hat (dies. Zbl. 8, 272) eine Geometrie  $\mathfrak{C}$  aufgebaut, in der  $J$  den Inhalt von  $H$  bedeutet. In ihr werden die Kurven  $\mathfrak{K}$  als Transversalen von Überflächen  $\mathfrak{S}$  angesehen; man geht von  $\mathfrak{S}$  zu  $\mathfrak{K}$  über, indem man den Einheitsvektor  $f^i g^{-\frac{1}{2}}$  der Normale zu  $\mathfrak{S}$  als den Einheitsvektor der Tangente an  $\mathfrak{K}$  erklärt. Die Bogenlänge auf  $\mathfrak{K}$  mißt man durch das Integral

$$S = \int L dt, \quad L = \sqrt{g_{ij} \dot{z}^i \dot{z}^j}, \quad \text{wo } g g^i = \frac{1}{2} \partial^2 f^2 / \partial p_i \partial p_j.$$

Auf die Frage, wann auch umgekehrt in einer Finslerschen Geometrie  $\mathfrak{F}$  mit der Bogenlänge  $S$  der Inhalt eines Überflächenstückes durch  $J$  gemessen wird, antwortet der Satz: Dieser Durchschnitt der Geometrien  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{F}$  rührt von solchen Variationsaufgaben der Überflächen und Kurven her, daß bei ihnen die Hessesche Determinante des Quadrates der Grundfunktion nicht von den Ableitungen abhängt. Dann bleibt, wie nachgeholt sei, beim Übergang  $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{K}$  die Transversalität erhalten. — In einem Anhang geht Verf. auf das Verhalten der vorgekommenen Größen bei Punktverwandlungen ein und zeigt, warum seine Ergebnisse mit den auf die Ausdrücke  $LL_i$  (statt auf  $LL_i g^{-\frac{1}{2}}$ ) gegründeten Cartans übereinstimmen.

Koschmieder (Graz).

Cartan, Élie: Sur une classe d'espaces de Weyl. Ann. École norm., III. s. 60, 1—16 (1943).

[L'au. caractérise dans cet article les espaces de Weyl à trois dimensions qui admettent  $\infty^2$  plans isotropes (c'est-à-dire des surfaces aux éléments tangents isotropes et absolument parallèles).] Attachons à chaque point  $M$  d'un espace de Weyl analytique (à forme fondamentale définie positive) à trois dimensions tous les trièdres rectangulaires d'origine  $M$ , dont les vecteurs sont de même longueur. Le passage d'un tel trièdre  $e_1, e_2, e_3$  au trièdre infiniment voisin se fait par une translation  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), par une homothétie de rapport  $1 + \bar{\omega}$  et par une rotation  $\omega_{ij}$  ( $= -\omega_{ji}$ ). On en déduit facilement les formules (1) pour les différentielles covariantes  $DM, De_i$  et les équations de structure (2) respectives, où intervient la courbure  $\Pi$  ( $= -\bar{\omega}'$ )  $\Omega_{ij}$ . — L'équation de l'élément du plan isotrope étant (3a)  $(1 - \lambda^2)\omega_1 + i(1 + \lambda^2)\omega_2 + 2\lambda\omega_3 = 0$ , on trouve, grâce à (1), que la condition pour le parallélisme covariant de cet élément (le long de l'élément lui-même) s'exprime par (3b)  $dt + \frac{1}{2}i(1 - \lambda^2)\omega_{23} - \frac{1}{2}(1 + \lambda^2)\omega_{31} + i\lambda\omega_{12} = 0$ . Les conditions d'intégrabilité (4) de (3b) font voir que la courbure  $\Pi, \Omega_{ij}$  s'exprime



au moyen de quatre fonctions  $K, H_i$ , dont les dérivées covariantes  $K_j, H_{ij}$  sont liées par quatre équations équivalentes à l'identité de Bianchi (5). On en déduit les formules (6) pour  $DK, DH_i$  et  $DK_i$  qui permettent de calculer les 7 fonctions  $\bar{\omega}, \omega_i, \omega_{ij}$  ( $= -\omega_{ji}$ ) comme formes linéaires en  $dK, dH_i, dK_i$  dont les coefficients dépendent en outre des quantités  $H_{ij} + H_{ji}, K_{ij} + K_{ji}$ . Bien entendu, les différentielles extérieures des équations (6) doivent être vérifiées quand on y remplace les différentielles extérieures  $\bar{\omega}', \omega'_i, \omega'_{ij}$  par leurs valeurs tirées de (2) et (4). On obtient ainsi un système différentiel aux fonctions inconnues  $H_{ij} + H_{ji}, K_{ij} + K_{ji}$  de 7 variables indépendantes  $K_1, H_i, K_i$ , (fermé par rapport à la différenciation extérieure) dont l'élément intégral à 7 dimensions le plus général dépend de 14 paramètres arbitraires; par conséquent ce système est en involution et de plus sa solution générale dépend de 4 fonctions arbitraires de deux arguments. On voit donc que les espaces  $W_3$  de Weyl à trois dimensions qui admettent  $\infty^2$  plans isotropes dépendent essentiellement de 4 fonctions arbitraires de deux arguments — Si un certain déterminant n'est pas nul, il existe un espace  $W_3$  et un seul tel qu'on y puisse plonger une surface admettant trois formes données à priori (dont deux sont quadratiques, la troisième est linéaire) comme formes fondamentales (à savoir la première, la seconde et la forme linéaire qui exprime la variation élémentaire de l'unité de longueur quand on passe d'un point à un point infiniment voisin). Hlavatý (Prag).

**Galvani, Octave:** Sur la réalisation des connexions euclidiennes ponctuelles à deux dimensions les plus générales. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 23—25 (1943).

Une connexion euclidienne ponctuelle à deux dimensions la plus générale n'est pas réalisable par une congruence de droites de l'espace euclidien  $E_3$ . L'auteur considère une congruence  $V$  des plans  $C_j$  de l'espace euclidien  $E_4$ . La connexion euclidienne induit en  $V$  une connexion à deux dimensions. On arrive au résultat suivant. Une connexion à deux dimensions est réalisable localement par une infinité de congruences de plans de  $E_4$ . La solution générale dépend d'une fonction arbitraire de deux arguments.

J. Haantjes (Amsterdam).

**Vranceanu, G.:** Sur les invariants des espaces de Riemann singuliers. Disquisit. Math. et Phys., București **2**, 253—281 (1942).

Si le tenseur fondamental  $g_{\lambda\mu}(x^1, \dots, x^n)$  est de la forme  $g_{\lambda\mu} = \sum_1^m \bar{e}_\lambda^a \bar{e}_\mu^a$  (les  $\bar{e}_\lambda^a$  étant des verseurs orthogonaux et  $m < n$ ), l'espace en question sera dit espace singulier  $V_{n,m}$  (de Riemann). En introduisant les verseurs  $\dot{e}_\lambda$  ( $\lambda = m+1, \dots, n$ ) de façon que  $\dot{e}_\lambda$  ( $i = 1, \dots, n$ ) soient mutuellement orthogonaux, le repère  $\dot{e}_\lambda$  est défini aux équations

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{e}_\lambda^{a'} &= C_a^{a'} \bar{e}_\lambda^a, & (a' = 1', \dots, m'; a = 1, \dots, m), \\ \dot{e}_\lambda^{f'} &= C_f^{f'} \dot{e}_\lambda^f + C_a^{f'} \bar{e}_\lambda^a, & (f' = m'+1', \dots, n'; f = m+1, \dots, n) \end{aligned}$$

près, où, bien entendu,  $C_a^{a'}, C_f^{f'}$  sont les coefficients d'une transformation orthogonale qui conserve les longueurs. Si l'on introduit «l'objet d'anholonomie»  $\Omega_{jk}^i$  (Schouten) (dont les composantes  $\Omega_{jk}^a$  peuvent être écrites aussi dans notre cas  $\Omega_{jka} = \Omega_{jk}^a$ :  $j, k = 1, \dots, n$ ;  $a = 1, \dots, m$ ) et les coordonnées (holonomes ou non)  $ds^i = \dot{e}_\lambda^i dx^\lambda$ , l'équation d'Euler (pour la variation de l'arc) nous donne immédiatement l'équation des géodésiques

$$(2) \quad \bar{e}_v^a \frac{d}{dt} \frac{ds_a}{dt} + \Omega_{jk}^b \frac{ds_b}{dt} \frac{ds^k}{dt} \dot{e}_v^j = 0 \quad \left( a, b = 1, \dots, m; j, k = 1, \dots, n; \frac{ds^b}{dt} = \frac{ds_b}{dt} \right)$$

d'où l'on déduit aussitôt

$$(3) \quad \Omega_{efb} \frac{ds^b}{dt} \frac{ds^f}{dt} + \frac{1}{2} (\Omega_{eab} + \Omega_{eba}) \frac{ds^b}{dt} \frac{ds^a}{dt} = 0 \quad (e, f = m+1, \dots, n; a, b = 1, \dots, m).$$

Les coefficients  $\Omega_{efb}$  de même que  $\Omega_{efb}$  et  $\frac{1}{2}(\Omega_{eab} + \Omega_{eba})$  constituent les tenseurs [par rapport à (1)] à savoir le tenseur d'anholonomie et les seconds tenseurs fondamentaux. En général  $V_{n,m}$  ne possède pas d'autres tenseurs, déduits de la transformation [par rapport à (1)] de  $\Omega$ . Si l'on prescrit que l'équation  $\Omega_{ea1} + \Omega_{e1a} = 0$  soit conservée par (1), cette condition exige que (1) soit séparable ( $C_a^f = 0$ ) et par conséquent géométrisable. Dans les cas holonome ( $\Omega_{efb} = 0$ ) les seconds tenseurs donnent naissance à un tenseur quadratique  $b_{ef} = \Omega_{e(ab)} \Omega_f^{(ab)}$ . Si son déterminant n'est pas nul, on parvient (en appliquant le procédé de Christoffel à la transformation de  $\Omega$  et de ses dérivées) au tenseur de courbure  $b_{ef,gh}$  ( $e, f, g, h = m+1, \dots, n$ ) de  $b_{ef}$ . On constate facilement que la dérivée  $\frac{\partial I}{\partial s^f}$ , ( $f = m+1, \dots, n$ ) d'un invariant  $I$  est un vecteur [par rapport à (1)]. — Le travail finit par l'application des résultats mentionnés au cas  $m = n-1$  et en particulier au cas  $m = 2, n = 3$ . *Hlavatý* (Prag).

**Petreseu, St.:** Sur les hypersurfaces non holonomes  $V_{2p+1}^{2p}$ . Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 25, 249—253 (1943).

On considère, par la méthode du calcul différentiel absolu des congruences, les invariants des hypersurfaces non holonomes  $V_{2p+1}^{2p}$ , définies par l'éq. de Pfaff non intégrable  $ds^{2p+1} = \lambda_i^{2p+1} dx^i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, 2p+1$ ). En tenant compte que le groupe de la  $V_{2p+1}^{2p}$  peut s'écrire

$$(1) \quad d\bar{s}^a = c_b^a ds^b + c_{2p+1}^a ds^{2p+1}, \quad d\bar{s}^{2p+1} = \lambda ds^{2p+1}. \quad (a, b = 1, 2, \dots, 2p+1),$$

où  $ds^1, \dots, ds^{2p}, ds^{2p+1}$ , sont  $n$  formes de Pfaff indépendantes et  $c_b^a, c_{2p+1}^a$  et  $\lambda$  ( $\neq 0$ ), sont fonctions des  $x$ , telles que  $|c_b^a| \neq 0$ ,  $c_b^a c_a^d = \delta_b^d$ , on peut réduire le covariant à la forme canonique

$$(2) \quad \Delta s^{2p+1} = C_{2\alpha-1, 2\alpha} ds^{2\alpha-1} ds^{2\alpha} + w_{2p+1, \beta} ds^{2p+1} ds^\beta \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p; \beta = 1, 2, \dots, 2p).$$

Si l'on suppose les coefficients  $C$  distincts, on arrive à donner au groupe (1) la forme

$$ds^{2\alpha-1} = \cos \vartheta_\alpha ds^{2\alpha-1} + \sin \vartheta_\alpha ds^{2\alpha}, \quad d\bar{s}^{2\alpha} = -\sin \vartheta_\alpha ds^{2\alpha-1} + \cos \vartheta_\alpha ds^{2\alpha}, \\ d\bar{s}^{2p+1} = ds^{2p+1}, \quad (\alpha = 1, \dots, p)$$

qui conserve le covariant (2) avec  $C_{12} = 1$ ,  $w_{2p+1, \beta} = 0$  et aussi les systèmes

$$ds^{2\alpha-1} = ds^{2\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p).$$

Les fonctions  $\vartheta_\alpha$  satisfont à un certain système aux différentielles totales, avec un certain nombre de relations en termes finis. Si ces relations déterminent toutes les  $\vartheta_\alpha$ , les invariants de la  $V_{2p+1}^{2p}$  sont les invariants de  $2p+1$  formes de Pfaff. Si ces relations sont identiquement satisfaites, l'hypersurface peut être réduite à avoir la structure

$$(3) \quad \Delta s^{2\alpha-1} = A_{2\alpha-1, 2\alpha} ds^{2\alpha-1} ds^{2\alpha}, \quad \Delta s^{2\alpha} = B_{2\alpha-1, 2\alpha} ds^{2\alpha-1} ds^{2\alpha}, \\ \Delta s^{2p+1} = C_{2\beta-1, 2\beta} ds^{2\beta-1} ds^{2\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p; C_{12} = 1)$$

$\partial A_{2\alpha-1, 2\alpha} / \partial s^\varrho = \partial B_{2\alpha-1, 2\alpha} / \partial s^\varrho = 0$ , ( $\varrho = 2\beta-1, 2\beta, 2p+1$ ), avec  $C_{2\beta-1, 2\beta}$  constants.

Les conditions d'intégrabilité du système en  $\vartheta_\alpha$ , qui s'obtient en ce cas, donnent  $p$  invariants absolus  $I_\alpha$ . S'ils sont constants, le groupe maximum de transformations de la  $V_{2p+1}^{2p}$ , en elle-même, dépend de  $3p+1$  paramètres. L'hypersurface  $V_{2p+1}^{2p}$  correspondante s'appelle à courbure constante. — l'A. donne ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour que les formes  $ds^{2\alpha-1}, ds^{2\alpha}, ds^{2p+1}$  déterminent une  $V_{2p+1}^{2p}$  à courbure constante  $I_\alpha$ . En particulier, si les coefficients des covariants (3) sont constants et la  $V_{2p+1}^{2p}$  est à courbure nulle, les  $\vartheta_\alpha$  sont aussi constantes et le groupe d'applicabilité de la  $V_{2p+1}^{2p}$  dépend encore de  $3p+1$  paramètres,  $p$  d'entre eux étant les constantes  $\vartheta_\alpha$ .

*G. Vranceanu* (Bukarest).



Petrescu, St.: Sur les hypersurfaces non holonomes  $V_{2p+2}^{2p+1}$ . Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 25, 313—317 (1943).

L'A. expose quelques résultats, relativement aux hypersurfaces non holonomes  $V_{2p+2}^{2p+1}$ , définies par des équations  $ds^{2p+2} = \lambda_i^{2p+2} dx^i = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, 2p+2$ ), non intégrables. Par des procédés analogues à ceux employés dans le cas des hypersurfaces  $V_{2p+1}^{2p}$  (cfr. le travail précédent) il arrive à donner au groupe de la  $V_{2p+2}^{2p+1}$ , la forme

$$\begin{aligned} d\bar{s}^{2\alpha-1} &= \cos \vartheta_\alpha d\bar{s}^{2\alpha-1} + \sin \vartheta_\alpha d\bar{s}^{2\alpha}, & d\bar{s}^{2\alpha} &= -\sin \vartheta_\alpha d\bar{s}^{2\alpha-1} + \cos \vartheta_\alpha d\bar{s}^{2\alpha} \\ d\bar{s}^{2p+1} &= d\bar{s}^{2p+1}, & d\bar{s}^{2p+2} &= d\bar{s}^{2p+2}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p), \end{aligned}$$

qui conserve le covariant

$$\Delta \bar{s}^{2p+2} = C_{2\alpha-1, 2\alpha} d\bar{s}^{2\alpha-1} d\bar{s}^{2\alpha} + C_{2p+1, 2p+2} d\bar{s}^{2p+1} d\bar{s}^{2p+2}, \quad (C_{12} = 1).$$

Dans le cas où toutes les relations en termes finis sont satisfaites identiquement, l'A. arrive à donner aux covariants  $\Delta s^\sigma$  ( $\sigma = 1, \dots, 2p+2$ ) les formes canoniques

$$\Delta s^{2\alpha-1} = A_{2\alpha-1, 2\alpha} d\bar{s}^{2\alpha-1} d\bar{s}^{2\alpha} + A d\bar{s}^{2\alpha-1} d\bar{s}^{2p+1}, \quad \Delta s^{2\alpha} = B_{2\alpha-1, 2\alpha} d\bar{s}^{2\alpha-1} d\bar{s}^{2\alpha} + A d\bar{s}^{2\alpha} d\bar{s}^{2p+1},$$

$$(\alpha = 1, \dots, p)$$

$\Delta s^{2p+1} = 0$ ,  $\Delta s^{2p+2} = C_{2\alpha-1, 2\alpha} d\bar{s}^{2\alpha-1} d\bar{s}^{2\alpha} + 2A d\bar{s}^{2p+2} d\bar{s}^{2p+1}$ , ( $C_{12} = 1$ ,  $A = -2C_{2p+1, 2p+2}$ ) les coefficients  $C_{2\alpha-1, 2\alpha}$  étant invariants et constants et les  $A, B$  satisfaisant aux équations suivantes

$$\begin{aligned} \partial A_{2\alpha-1, 2\alpha} / \partial \bar{s}^{2\beta-1} &= \partial A_{2\alpha-1, 2\alpha} / \partial \bar{s}^{2\beta} = \partial A_{2\alpha-1, 2\alpha} / \partial \bar{s}^{2p+2} = 0, \\ \partial A_{2\alpha-1, 2\alpha} / \partial \bar{s}^{2p+1} &+ A \cdot A_{2\alpha-1, 2\alpha} = 0, \quad (\beta \neq \alpha) \end{aligned}$$

(pour les éq. en  $B$  il suffit de changer  $A$  en  $B$ ). Si  $C_{2p+1, 2p+2} = 0$ , on a pour la  $V_{2p+2}^{2p+1}$  la structure

$$\begin{aligned} \Delta s^{2\alpha-1} &= A_{2\alpha-1, 2\alpha} d\bar{s}^{2\alpha-1} d\bar{s}^{2\alpha}, & \Delta s^{2\alpha} &= B_{2\alpha-1, 2\alpha} d\bar{s}^{2\alpha-1} d\bar{s}^{2\alpha} \\ (1) \quad \Delta s^{2p+1} &= w_{2\beta-1, 2\beta} d\bar{s}^{2\beta-1} d\bar{s}^{2\beta}, & \Delta s^{2p+2} &= C_{2\beta-1, 2\beta} d\bar{s}^{2\beta-1} d\bar{s}^{2\beta}, \\ &(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p; \quad C_{12} = 1, \quad w_{12} = 0) \end{aligned}$$

à coefficients constants. Dès là conditions d'intégrabilité du système différentiel en  $\vartheta_\alpha$ , en résultant  $p$  invariants absolus  $I_\alpha$  et si ces invariants sont constants, de même que  $C_{2p+1, 2p+2}$ , la  $V_{2p+2}^{2p+1}$  est à courbure constante. Pour qu'elle soit à courbure nulle, il faut et il suffit qu'on ait  $A_{2\alpha-1, 2\alpha} = B_{2\alpha-1, 2\alpha} = C_{2p+1, 2p+2} = 0$ , ( $\alpha = 1, \dots, p$ ). Une  $V_{2p+2}^{2p+1}$ , dont la structure est (1), à coefficients constants, est à courbure constante (négative ou nulle). Le groupe d'applicabilité d'une telle hypersurface dépend de  $3p+2$  paramètres. —

G. Vranceanu (Bukarest).

## Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Über Kontinua mit unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen J. reine angew. Math. 185, 231—240 (1943).

Es sei  $M$  eine Punktmenge der euklidischen Ebene und  $P$  einer ihrer Punkte. Verf. spricht von starker bzw. schwacher Unvollständigkeit der (lokalen) Halbsekantenmenge in  $P$ , wenn eine Umgebung  $U$  von  $P$  existiert, für welche die Menge  $MU - (P)$  überdeckt werden kann durch paarweise fremde, offene Sektoren mit dem Scheitel  $P$ , deren Öffnungswinkel sämtlich beliebig klein bzw.  $< \pi$  sind. In Verallgemeinerung eines Satzes von K. Wagner (dies. Zbl. 24, 103) beweist Verf.: 1. Ein Kontinuum (mehrpunktige, zusammenhängende, beschränkte, abgeschlossene Menge), dessen lokale Halbsekantenmengen beinahe überall (d. h. überall bis auf höchstens abzählbar viele Punkte) stark unvollständig sind, besitzt beinahe überall genau eine Tangente. 2. Ein Kontinuum mit beinahe überall schwach unvollständigen lokalen Halbsekantenmengen ist eine reguläre Kurve und zugleich eine erbliche Bogensumme; sie besitzt höchstens abzählbar viele End- und Verzweigungspunkte (zu diesen Begriffen der Kurventheorie vgl. K. Menger, Kurventheorie, 1932; dies. Zbl. 5, 415). Nöbeling (Erlangen).

**Buckel, Walter:** Über eine Verallgemeinerung der Dupinschen Indikatrix. J. reine angew. Math. 185, 144—191 (1943) u. Erlangen: Diss. 1943.

Dans cette Dissertation l'auteur traite par la géométrie différentielle classique des problèmes suggérés par la théorie des ordres géométriques (géométrie finie) de Haupt et donne des définitions qui permettront dans une étude ultérieure le développement d'un nouveau chapitre de géométrie infinitésimale directe. Dans le § 1 il étudie les propriétés différentielles d'une hypersurface  $\mathfrak{S}: y = f(x_1, \dots, x_k) = f(P)$  en un point  $Q = (P, y)$ , liées à la considération du nombre de points d'intersection voisins de  $Q$  de  $\mathfrak{S}$  avec des droites, la fonction  $f$  étant supposée dérivable jusqu'à l'ordre  $k + 1$  inclusivement. Développant une note antérieure (ce Zbl. 24, 138), il donne les conditions analytiques suffisantes pour que le point de contact  $Q$  d'ordre de multiplicité  $\geq m - 1$  ( $3 \leq m \leq k + 1$ ) d'une tangente  $\mathfrak{T}_0$  puisse donner naissance à au moins  $m$  points d'intersection voisins de  $Q$  distincts par déplacement arbitrairement petit mais convenable de  $\mathfrak{T}_0$ . Cette idée de la „resolution d'un point multiple“ est l'idée directrice de ce travail; elle constitue l'apport original principal de l'auteur. L'étude précédente conduit naturellement à la notion du point ordinaire  $H$  de  $\mathfrak{S}$  qui jouit des propriétés suivantes: 1. L'ordre de multiplicité  $l$  d'une tangente  $\mathfrak{T}$  quelconque à  $\mathfrak{S}$  en  $H$  est compris entre 0 et  $k + 1$ . 2. Par déplacement arbitrairement petit de  $\mathfrak{T}$  le point multiple  $H$  se résout en au plus  $l + 1$  points distincts et pour un choix convenable du déplacement exactement en  $l + 1$ . Dans le cas où  $k = 2$ , les points ordinaires sont les points elliptiques et les points hyperboliques. Passant au domaine géométrique, l'auteur introduit les notions d'ordre local d'une hypersurface en un point, les caractéristiques d'ordre étant les droites, puis de caractéristique d'ordre  $m$  en s'inspirant de la résolubilité d'un point de contact multiple d'une tangente. En un point ordinaire d'une hypersurface  $\mathfrak{S}$  sa définition de l'ordre s'applique et donne un nombre au moins égal à deux et au plus égal à  $k + 1$ .  $M_m$  représentant en un point  $Q$  de  $\mathfrak{S}$  l'ensemble des caractéristiques limites d'ordre au moins égal à  $m$ , la suite des  $M_m$  non vides  $J = (M_1, M_2, \dots)$  est appelée indicatrice (affine) d'ordre géométrique de  $\mathfrak{S}$  en  $Q$ ; si cette suite est finie, l'index  $\lambda(Q)$  de son dernier élément est dit longueur de l'indicatrice. Si l'ordre de  $\mathfrak{S}$  en  $Q$  est borné, il est égal à  $\lambda(Q)$ ; si cet ordre n'est pas borné, la longueur de l'indicatrice n'est pas bornée. Dans le § 2 sont dégagées sous forme axiomatique les notions qui sont à la base de la théorie des ordres géométriques dans un espace  $\mathfrak{R}$ . Les caractéristiques d'ordre apparaissent comme les images d'un ensemble fixe  $\mathfrak{B}$  (base) par les transformations  $T$  d'une famille  $\{T\}$ . Si  $\mathfrak{R} = E_n$  (espace euclidien  $n$ -dimensionnel) et si  $\{T\}$  est le groupe des déplacements, l'ordre ainsi défini est l'ordre cinématique. Les considérations du § 1 se rapportent à cet ordre lorsque  $\mathfrak{B}$  est une droite. Le § 3 étudie analytiquement le cas où  $\mathfrak{B}$  est une courbe  $\mathfrak{C}: \varphi(I)$ ,  $I$  intervalle ouvert;  $\mathfrak{S}$  est l'image topologique d'un cube  $W$  à  $(n - 1)$  dimensions,  $\mathfrak{S}: \varphi(W)$ ; les fonctions  $\psi$  et  $\varphi$  sont supposées convenablement dérivables. Les paramètres  $t$  des points de rencontre de  $\mathfrak{S}$  avec la courbe  $T(\mathfrak{C})$  sont les racines d'une équation  $\Phi_T(t) = 0$ ; au moyen de cette fonction  $\Phi_T(t)$ , l'aut. donne des conditions de résolubilité d'un point de tangence de  $\mathfrak{S}$  et de  $\mathfrak{C}^* = T^*(\mathfrak{C})$  en  $m$  points distincts voisins par petit déplacement de  $\mathfrak{C}^*$ . Au point ordinaire du § 1 correspond ici le couple ordinaire de points de  $\mathfrak{C}$  et de  $\mathfrak{S}$ ; si  $P^*, Q^*$  est un tel couple,  $T(P^*) = Q^*$ , et si  $T(\mathfrak{C})$  et  $\mathfrak{S}$  ont un contact d'ordre  $m - 1$  en  $Q^*$ , par petit déplacement de  $T(\mathfrak{C})$  apparaissent au plus  $m$  points d'intersection distincts voisins de  $Q^*$  et par un choix convenable exactement  $m$ . Les notions d'ordre local, de caractéristique limite d'ordre  $m$  et d'indicatrice cinématique sont alors introduites naturellement. Cette Dissertation se termine par quelques indications sur le cas où la base  $\mathfrak{B}$  est une surface  $k$ -dimensionnelle et la variété fixe à étudier une surface  $(n - k)$ -dimensionnelle; elles laissent prévoir l'apparition de difficultés nouvelles.

*Christian Pauc* (Erlangen).



**Dinghas, Alexander:** Über die lineare isoperimetrische Ungleichung für konvexe Polygone und Kurven mit Ecken. *Mh. Math. Phys.* **51**, 35—45 (1943).

Die von G. Bol (dies. Zbl. **26**, 89; **28**, 93) entwickelte Methode der Parallelbereiche nach innen verwendet Verf. zur Gewinnung einer neuen ebenen isoperimetrischen Ungleichung. Ausgehend von einem konvexen Bereich  $B$  hört die Bildung der inneren Parallelbereiche  $B(\lambda)$  im Abstand  $\lambda$  mit dem sog. Kern auf, zu dem die Kernentfernung  $h$  [= Maximum des Abstandes der Punkte  $P(P \in B)$  vom Rand  $C$  von  $B$ ] gehört. Ist  $B$  zunächst ein konvexes Polygon mit den Eckenwinkeln  $\psi$  (vgl. Dinghas, dies. Zbl. **26**, 360; **27**, 262) und  $F^* = \sum \tan \psi/2$  der Inhalt des entsprechenden Kappenpolygons um den Einheitskreis, so gilt (1)  $F - Lh + F^*h^2 \leq 0$ , wobei das Gleichheitszeichen nur eintritt, wenn  $B$  Kappenpolygon eines Kreises oder eines teleskopisch ausgezogenen Kreises ist, je nachdem der Kern von  $B$  ein Punkt oder eine Strecke ist. (1) gilt auch für jeden konvexen ebenen Bereich mit der Kernentfernung  $h$ , dessen Rand  $C$  die Eckenwinkel  $\psi$  aufweist, wenn  $F^* = \pi + \sum (\tan \psi/2 - \psi/2)$  der Inhalt des entsprechenden Kappenbereiches um den Einheitskreis ist; bezüglich des Gleichheitszeichens gilt eine analoge Aussage. Der Beweis gründet sich unter Verwendung der Bolschen Gedanken auf den Nachweis, daß  $D(\lambda) = F(\lambda) - L(\lambda) \cdot (h - \lambda) + F^* \cdot (h - \lambda)^2$  worin  $L(\lambda)$ ,  $F(\lambda)$  Umfang und Inhalt von  $B(\lambda)$  bezeichnen, nichtpositiv und stetig nichtabnehmend in  $\lambda$  ist.

Harald Geppert (Berlin).

**Dinghas, Alexander:** Verschärfung der Minkowskischen Ungleichungen für konvexe Körper. *Mh. Math. Phys.* **51**, 46—56 (1943).

Zwischen Oberfläche  $O$ , Inhalt  $V$  und Integral der mittleren Krümmung  $M$  eines konvexen Körpers  $\mathfrak{K}$  bestehen bekanntlich folgende Minkowskische Ungleichungen: (1)  $O^2 \geq 3MV$ , (2)  $M^2 \geq 4\pi O$ . Dabei gilt in (1) das Gleichheitszeichen nach einer kürzlich von Bol bewiesenen Minkowskischen Vermutung (dies. Zbl. **28**, 93) nur für die Kugel und für Kappenkörper der Kugel, während in (2) dies nur für die Kugel der Fall ist. Verf. zeigt nun im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **26**, 89), daß in (2) die Größe  $4\pi$  durch die Oberfläche  $O^*$  des dem Körper  $\mathfrak{K}$  „zugeordneten Kappenkörpers“ ersetzt werden kann, und daß in der verschärften Ungleichung (3)  $M^2 \geq O^*O$  das Gleichheitszeichen nicht nur für die Kugel, sondern auch für Kappenkörper der Kugel gilt. — Aus (1) und (3) ergibt sich durch Kombination (4)  $O^3 \geq 9O^*V^2$ . Über diese bereits in dem oben zitierten Aufsatz bewiesene Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung  $O^3 \geq 36\pi V^2$  hinaus wird die noch schärfere Ungleichung (5)  $O^3 \geq 9\bar{O}V^2$  bewiesen, in der  $\bar{O}$  die Oberfläche des „zugeordneten Tangentialkörpers“  $\bar{\mathfrak{K}}$  bedeutet. Dieser läßt sich etwa folgendermaßen definieren: Man lege in  $\mathfrak{K}$  eine Kugel  $\mathfrak{S}$  und verschiebe sämtliche singulären (d. h. mindestens zwei Punkte von  $\mathfrak{K}$  enthaltenden) Stützebenen von  $\mathfrak{K}$  sowie sämtliche regulären Stützebenen von  $\mathfrak{K}$ , die durch keinen Eckpunkt gehen, mit sich parallel, bis sie  $\mathfrak{S}$  berühren. Die so erhaltenen Ebenen umhüllen einen konvexen Körper  $\mathfrak{K}'$ . Dieser geht durch eine Streckung, die  $\mathfrak{S}$  in die Einheitskugel überführt, in den zugeordneten Tangentialkörper  $\bar{\mathfrak{K}}$  über. Gleichheit besteht in (5) nur für Kugel und Kappenkörper der Kugel. — Zum Schluß werden analoge Verschärfungen im  $R_n$  bewiesen.

László Fejes (Kolozsvár).

**Schmidt, Erhard:** Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionszahl. *Math. Z.* **49**, 1—109 (1943).

In dieser Arbeit, die nahe mit vorhergehenden Schriften (insbes. *Math. Z.* **44**, 689 bis 788 (1939); **46**, 204–230 (1940); dies. Zbl. **20**, 373; **22**, 403) desselben Verf. zusammenhängt, wird im wesentlichen in einheitlicher Art sowohl für den Euklidischen wie den hyperbolischen und sphärischen  $n$ -dimensionalen Raum die „isoperimetrische Haupteigenschaft“ der Kugel bewiesen, nämlich bei gegebenem Inhalt kleinste Oberfläche zu besitzen. Von den Vergleichskörpern wird dabei in der Hauptsache angenommen, daß sie schlicht sind und stückweis zweimal stetig differenzierbaren Rand besitzen. Über den Zusammenhang der Vergleichskörper wird dabei keine Einschränkung ge-

macht. Den Grundgedanken des Beweises bilden Verallgemeinerungen der „Abrundung“ aus der Behandlung des dreidimensionalen Euklidischen Falles durch H. A. Schwarz von 1885. Diese Abrundung gestattet dann vollständige Induktion nach der Dimensionenzahl  $n$ . Es wird nämlich (roh gesprochen) etwa folgendes gezeigt: Man schneide im Euklidischen, hyperbolischen oder sphärischen  $R_n$  einen Körper  $K$  entweder mit einer Schar von Abstandsflächen einer Ebene oder von konzentrischen Kugeln oder endlich im hyperbolischen Fall mit einer Schar äquidistanter „Orizykelflächen“ (Grenzfall der konzentrischen Kugeln). Dann besteht auf jeder dieser Flächen eine Metrik festen Krümmungsmaßes. Man ermittle nun einen Körper  $K'$  nach folgender Vorschrift. Der Durchschnitt jeder Scharfläche mit  $K'$  sei eine  $(n-1)$ -dimensionale Vollkugel inhaltsgleich zum Durchschnitt der Fläche mit  $K$ . Ordnet man dann die Mittelpunkte dieser Kugeln auf einer Geraden an, die die Scharflächen rechtwinklig durchsetzt, so wird  $K'$  ein Drehkörper.  $K'$  ist inhaltsgleich zu  $K$  und hat im allgemeinen kleinere Oberfläche als  $K$ . Es werden auch die Fälle ermittelt, wenn das Gleichheitszeichen gilt. Zum Schluß wird noch eine Ausdehnung von Untersuchungen von Brunn-Minkowski angekündigt. — So ist der Grundgedanke der umfangreichen Schrift einfach und klar. Dazu tritt aber eine Fülle von Einzelheiten in der strengen Durchführung der Schlüsse.

Blaschke (Hamburg).

**Maak, Wilhelm: Ergänzung und Berichtigung zur Abhandlung in Band 118, S. 299.** Math. Ann. **119**, 162—164 (1943).

Wird die in der Poincaréformel vorgesehene Integration statt über die Schnittpunktszahl  $N$  zweier streckbaren Kurven über die Punktszahl  $\bar{N}$  (Komponentenzahl) ihres Durchschnittes erstreckt, so bleibt das Resultat unverändert, d. h. zwei streckbare Kurven berühren sich fast nie. Verf. leitet dieses Resultat, das eine Ergänzung zu einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **26**, 267) darstellt, dadurch ab, daß er die Poincaréformel durch Grenzübergang aus der Blaschkeschen Hauptformel hervorgehen läßt. Es folgt ein Beweis dafür, daß das Poincaréintegral mit  $\bar{N}$  nicht endlich ist, falls wenigstens eine der beiden Kurven nicht streckbar ist (in der oben zitierten Arbeit steht  $N$  statt  $\bar{N}$  mit einer kleinen Ungenauigkeit im Beweis).

H. Hadwiger (Bern).

**Santaló, Luis A.: Einige Mittelwerte und Ungleichungen bezüglich Kurven, die auf einer Kugel liegen.** Rev. Un. Mat. Argent. **8**, 113—125 (1942) [Spanisch].

Verbindet man benachbarte Punkte eines der Einheitskugelfläche (Radius = 1) einbeschriebenen regulären Polyeders mit  $e$  ( $e = 4, 6, 8, 12, 20$ ) Seitenflächen durch Großkreisbögen, so entsteht ein reguläres Kreisboggennetz  $\mathfrak{N}$  mit  $v_e$  Punkten und  $a_e$  Kreisbögen der Länge  $d_e$ . — Durch Anwendung der sphärischen Poincaréformel {vgl. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie 2. Heft, Leipzig und Berlin 1937, S. 81, dies. Zbl. **16**, 277} berechnet Verf. zunächst den Mittelwert  $\bar{n}$  der Schnittpunktszahl  $n$  einer auf der Kugelfläche beweglichen Kurve der Länge  $L$  mit den Kreisbögen von  $\mathfrak{N}$  und zieht aus dem Resultat

$$\bar{n} = a_e d_e L / (2\pi^2)$$

einige Folgerungen. Dann wird der Mittelwert  $\bar{v}$  für die Zahl der von einem beweglichen sphärischen Gebiet vom Flächeninhalt  $F$  bedeckten Punkte von  $\mathfrak{N}$  ermittelt. Es ist

$$\bar{v} = v_e F / (4\pi).$$

Auch hier werden verschiedene Folgerungen und Erweiterungen erwähnt, die z. T. als Übertragungen verschiedener sich auf Ebene und Raum beziehender Resultate des Verf. und des Ref. (vgl. dies. Zbl. **14**, 125, **16**, 43, **20**, 262) bezeichnet werden können. — Ein sphärisches Gebiet, dessen Fläche nicht größer als  $2\pi$  ist, und dessen Rand von keinem Großkreis in mehr als 2 Punkten geschnitten wird, heißt konvex. — Durch Anwendung der sphärischen kinematischen Hauptformel (W. Blaschke a. a. O. S. 82) werden zwei hinreichende Bedingungen dafür, daß ein konvexes Gebiet  $\mathfrak{G}$  ganz durch



ein anderes ebensolches  $\mathfrak{G}_0$  überdeckt werden kann, abgeleitet. Sie lauten:

- (a)  $LL_0 - \sqrt{L^2 L_0^2 - FF_0(4\pi - F)(4\pi - F_0)} > F(4\pi - F_0),$   
 (b)  $LL_0 + \sqrt{L^2 L_0^2 - FF_0(4\pi - F)(4\pi - F_0)} < F_0(4\pi - F).$

Hier bezeichnen  $F, F_0$  und  $L, L_0$  Flächeninhalte und Randlänge von  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0$ .

Durch Grenzübergang (Kugelradius  $\varrho \rightarrow \infty$ ) leitet Verf. die vom Ref. (dies. Zbl. **24**, 356) für Gebiete der Ebene aufgestellten hinreichenden Bedeckbarkeitsbedingungen ab. — Durch die Überlegung, daß die Bedingungen (a) und (b) nicht erfüllt sein können, falls man für  $\mathfrak{G}_0$  den Umkreis bzw. den Inkreis des Gebietes  $\mathfrak{G}$  mit den sphärischen Radien  $R$  und  $r$  wählt, gewinnt Verf. eine Reihe bemerkenswerter Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung  $L^2 + F^2 - 4\pi F = \Delta \geq 0$  für Gebiete auf der Einheitskugelfläche, so u. a. die Formeln:

$$\Delta \geq \left(L - F \cotg \frac{R}{2}\right)^2, \quad \Delta \geq \left(F \cotg \frac{r}{2} - L\right)^2, \quad \Delta \geq \frac{F^2}{4} \left(\cotg \frac{r}{2} - \cotg \frac{R}{2}\right)^2.$$

Durch Grenzübergang lassen sich auch hier wieder z. T. bekannte Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung für ebene Gebiete ableiten (vgl. hierzu die Arbeit des Ref., dies. Zbl. **26**, 267).  
*H. Hadwiger (Bern).*

## Angewandte Geometrie:

● **Haussner, Robert:** Darstellende Geometrie. 2. Tl. Perspektive ebener Gebilde, Kegelschnitte. 4. durchges. Aufl. (Samml. Göschens Bd. 143.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1943. 168 S. u. 88 Fig. geb. RM. 1.62.

Der Inhalt des Bändchens ist eine konstruktive Theorie der Kegelschnitte, die einerseits als Zentralprojektion des Kreises, andererseits als ebene Schnitte der Drehkegel definiert werden. Es wird gezeigt (in § 93, nicht wie auf S. 116 angegeben wird, in § 88), daß die zweite Definition nicht enger als die erste ist. Das Bändchen kann auch als brauchbarer Lehrbehelf empfohlen werden.

*Kruppa (Wien).*

**Schulz, Günther:** Zur Näherungskonstruktion der logarithmischen Spirale. Z. angew. Math. Mech. **23**, 184 (1943).

Verf. korrigiert eine Reihe von Unklarheiten einer Mitteilung von H. Meincke über denselben Gegenstand (dies. Zbl. **27**, 140), die sich als eine geringfügig, aber fehlerhaft veränderte Wiedergabe einer Arbeit des Verf. herausgestellt hat. *Rehbock.*

**Arvesen, Ole Peder:** Zur analytischen Lösung der Pohlkeschen Aufgabe. Norske Vid. Selsk., Forh. **14**, 87—89 (1942).

In bekannter Weise werden die Projektionsrichtung und das Lot der Bildebene für die Pohlkesche Aufgabe berechnet.

*Rehbock (Braunschweig).*

**Graf, Ulrich:** Affine Transformationen durch Doppel-Photographie. Z. angew. Math. Mech. **23**, 230—236 (1943).

Wird eine ebene Figur  $\{P_0\}$  photographiert, so entsteht eine zu ihr perspektive Figur  $\{\mathfrak{P}\}$ . Wird nun  $\{\mathfrak{P}\}$  photographiert, so entsteht eine zu  $\{P_0\}$  affine Figur  $\{P\}$ , wenn die Fluchtgerade von  $\{P_0\}$  in  $\{\mathfrak{P}\}$  in die Ferngerade von  $\{P\}$  übergeführt wird. Der Verf. stellt die analytischen Bedingungen auf, unter denen  $\{P\}$  zu  $\{P_0\}$  affin ist und untersucht ihre praktische Erfüllbarkeit. Von besonderer Bedeutung ist die photo-mechanische Transformation einer Figur in Rechteckformat in eine zu ihr affine mit vorgeschriebenem Rechteckformat.

*E. Kruppa (Wien).*

**Gheorghiu, Adrian:** Quelques considérations sur la perspective. Bul. Politehn., București **13**, 10—22 (1942).

Die Betrachtungen behandeln Raumperspektiven auf geneigten Bildebenen, wie sie im Luftbildwesen auftreten. Für die Konstruktion eines Bildpunktes wird folgendes Verfahren entwickelt. Durch den Raumpunkt  $A$  werden die Vertikale, die Tafel senkrechte und die Haupt-Horizontale gelegt; die Schnittpunkte mit der Tafel

seien  $A_0, A', A''$ . Ferner seien  $H, F$  und  $N$  der Hauptpunkt, der Fluchtpunkt der Tiefenlinien und der Fluchtpunkt der Lotlinien. Dann liegt der Bildpunkt von  $A$  zugleich auf den drei Geraden  $FA'', HA', NA_0$  und kann so leicht konstruiert werden. Weiterhin wird auf die Konstruktion räumlicher Raster eingegangen und dafür die Perspektive eines Dreibeins, eines Würfels und schließlich eines räumlichen Würfelrasters entwickelt. In das Bild eines solchen Rasters läßt sich ein gegebenes Raummotiv übertragen.

*U. Graf (Danzig).*

**Wunderlich, Walter:** Zur Eindeutigkeitsfrage der Hauptaufgabe der Photogrammetrie beim Finsterwalderschen Folgebildanschluß. *Mh. Math. Phys.* **51**, 57—58 (1943).

Verf. stellt fest, daß die von S. Finsterwalder (dies. Zbl. **26**, 157) eingeführte Einschränkung die „Gefahr“ einer Mehrdeutigkeit der Lösung der „Hauptaufgabe der Photogrammetrie“ zwar einschränkt, aber nicht aufhebt. *E. Kruppa (Wien).*

**Schulz, Gerhard:** Eine Methode zur Auflösung des räumlichen Rückwärtseinschnittes durch ein optisch-graphisches Verfahren mit Hilfe des Entzerrungsgerätes. *Z. Vermessungswes.*, Stuttg. **72**, 81—85 (1943).

Verf. entwickelt Formeln und Nomogramme, um aus den Einpassungsdaten des Entzerrungsgerätes die Elemente der äußeren Orientierung des Luftbildes zu bestimmen. *Sutor (Berlin).*

**Förstner, Rudolf:** Die Nadirdistanz und ihre Komponenten. *Z. Vermessungswes.*, Stuttg. **72**, 201—206 (1943).

Verf. entwickelt zunächst unter Berücksichtigung der Abhängigkeit der Drehachsen bei den Stereokartiergeräten strenge Formeln. Für die hauptsächlich vorkommende Aufnahmeart der Senkrechtaufnahmen wird zu Näherungsformeln übergegangen, die gestatten, die Neigung der Bildebene gegenüber der Horizontalen in zwei rechtwinklige Komponenten beliebigen Azimutes zu zerlegen oder die Komponenten des einen Azimutes in die eines anderen zu überführen. *Sutor (Berlin).*

**Havlíček, F. I.:** Zur geographischen Ortsbestimmung. *Astron. Nachr.* **273**, 251—252 (1943).

Aus dem sphärischen Dreieck Pol—Zenith—Gestirn leitet Verf. das Gleichungssystem

$$\sin \eta = -\frac{1}{\cos \delta} \cdot \frac{dh}{dt}, \quad \sin \varphi = \sin h \sin \delta + \cos h \cos \delta \cos \eta, \quad \sin t = -\frac{\cos h}{\cos \delta \cos \varphi} \cdot \frac{dh}{dt}$$

ab, in welchem  $h$  die Höhe,  $\delta$  die Deklination,  $\eta$  den parallaktischen Winkel  $\angle PGZ$ ,  $t$  den Stundenwinkel  $GPZ$  und  $\varphi$  die geographische Breite bedeuten. Aus der Messung einer Höhe  $h$  und der zugehörigen zeitlichen Änderung  $dh/dt$  eines Gestirnes bekannter Deklination  $\delta$  läßt sich also die geographische Breite  $\varphi$  und mittels des Stundenwinkels auch die geographische Länge des Beobachtungsortes bestimmen. Als Beispiel wird eine Sonnenbeobachtung auf See angeführt, die kurze Rechnung ist in vierstelligen Logarithmen angelegt. *v. Schelling (Berlin).*

**Schmehl, H.:** Zur Geometrie der Meridianellipse. *Z. Vermessungswes.*, Stuttg. **72**, 253—256 (1943).

Verf. gibt für eine Anzahl von Beziehungen, die für geodätische Rechnungen auf dem Erdellipsoid in Frage kommen und meist auf algebraischem Wege hergeleitet werden, einfache kurze und eindrucksvolle geometrische Deutungen und Konstruktionen an. Bei dieser Gelegenheit wird auf mancherlei Irrtümer bei der rechnerischen Herleitung dieser Beziehungen verwiesen. *Feyer (Stuttgart).*

**Wittke, Heinz:** Ein Beitrag zur Merkatorprojektion. *Z. Vermessungswes.*, Stuttg. **72**, 267—269 (1943).

Beim Übergang von geographischen Koordinaten zu ebenen rechtwinkligen Merkatorkoordinaten schlägt Verf. vor, die isometrische Breite einzuführen, was sich besonders gut für die Doppelmaschinenrechnung eignet. Für die Massenumformung von Punkten innerhalb eines nicht zu großen Gebietes wird die Einführung von Hilfsnullpunkten empfohlen. Einige Zahlenbeispiele sind den Ausführungen beigelegt. *Sutor.*



**Ludwig, Konrad:** Die der transversalen Mercatorkarte der Kugel entsprechende Abbildung des Rotationsellipsoids. *J. reine angew. Math.* 185, 193—230 (1943).

Für die in der Landesvermessung bedeutsame winkeltreue Abbildung des Rotationsellipsoides in eine Ebene, wobei ein Achsenschnitt in eine Gerade mit konstanter Längenvergrößerung abgebildet wird, werden aus isometrischen Parametern des Rotationsellipsoides und der Ebene komplexe Veränderliche gebildet, die auf Grund der Winkeltreue analytische Funktionen voneinander sind. Diese analytische Funktion wird vom Verf. in geschlossener Form durch Parameterdarstellung mit Hilfe einer komplexen Hilfsveränderlichen gegeben. Die Darstellung in geschlossener Form wird ermöglicht, indem an Stelle der geographischen Breite das elliptische Integral 1. Gattung eingeführt und dadurch das in der Bogenlänge des Achsenschnitts auftretende elliptische Integral 2. Gattung ins Komplexe fortgesetzt wird. Nach der Zerlegung in Real- und Imaginärteil erscheinen die isometrischen Parameter für Ellipsoid und Ebene als reelle Funktionen zweier reeller Hilfsparameter, und werden die Amplituden dieser Parameter als neue Parameter eingeführt, so werden die elliptischen Funktionen beseitigt. Durch diesen Kunstgriff wird die Zahlenrechnung wesentlich vereinfacht. Im einzelnen sind neben den Abbildungsgleichungen auch die Formeln für die Längenvergrößerung und die Meridiankonvergenz aufgestellt. Die gesondert vorangestellte transversale Mercatorabbildung der Kugel gibt die Möglichkeit, die aufgestellten allgemeinen Formeln für diesen Sonderfall verschwindender Exzentrizität nachzuprüfen. Die abschließende Zahlenrechnung, die mit großer Genauigkeit und unter Einsatz aller einschlägigen mathematischen Hilfsmittel durchgeführt ist, erweist den Nutzen und die Schlagkraft des gesamten Formelapparates, dessen tragender Kern jene geschlossene Darstellung der Abbildungsfunktion ist.

*U. Graf (Danzig).*

**Hauer, F.:** Entwicklung der flächentreuen Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoids in die Ebene bis einschließlich Glieder 4. Ordnung. *Z. Vermessungsw.*, Stuttgart. 72, 179—189 (1943).

Im Anschluß an eine frühere Abhandlung des Verf. (vgl. dies. Zbl. 24, 349) werden die Reihen der Abbildungsgleichungen, die eine flächentreue Abbildung kleiner Bereiche des Rotationsellipsoides in die Ebene bewirken, bis zu den Gliedern 4. Ordnung hergeleitet; die Koeffizienten werden auf Grund der Bedingungen bestimmt, daß bis einschließlich der Glieder 4. Ordnung in den Abbildungsgleichungen bzw. 3. Ordnung in den Verzerrungsgrößen die Abbildung flächentreu und das Netz rechtschnittig ist und daß die Verzerrungen in symmetrisch zum Mittelmeridian gelegenen Punkten gleich groß sind. Unter der Forderung geringster Streckenverzerrung werden Bereiche verschiedener Gestalt (kalottenförmig oder Haupterstreckung in Meridianrichtung bzw. Parallelkreisrichtung) behandelt. Wird von der Bedingung geringster Streckenverzerrung Abstand genommen, so läßt sich die Symmetrie der Verzerrungen auch zum Mittelparallel erzielen.

*U. Graf (Danzig).*

● **Hristow, Wl. K.:** Die Gauss-Krügerschen Koordinaten auf dem Ellipsoid. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1943. VI, 80 S. u. 9 Abb. RM. 5.—.

Verf. gibt „unter Benutzung von Vorarbeiten, die zum größten Teil in der Zeitschrift für Vermessungswesen erschienen sind, in gedrängter, aber strenger Form eine zusammenhängende Darstellung der Gauss-Krügerschen Koordinaten“. Formeln mit veränderlichen Koeffizienten und Potenzreihen mit festen Koeffizienten werden bis zur 5. O. einschließlich entwickelt, um bis zu einem Abstand von 2 Grad alter Teilung vom Grundmeridian die folgende Genauigkeit zu erhalten:  $0^m,001$  in den Gauss-Krügerschen Koordinaten,  $0'',001$  in der Meridiankonvergenz,  $0'',00001$  in den geographischen Koordinaten,  $1 \cdot 10^{-8}$  im Maßstab und seinem Logarithmus. Der praktischen Anwendung dienen eine Zusammenstellung der im theoretischen Teil erhaltenen Formeln und auf das Besselsche Referenzellipsoid bezogene Tafeln zur Berechnung der maßgebenden Grundaufgaben nach verschiedenen Methoden, Tafeln für die zwei geodätischen Hauptaufgaben, für Richtungs- und Entfernungsreduktion und für Transformation zwischen

zwei benachbarten Koordinatensystemen. Alle diese Aufgaben werden zum Schluß noch an Hand von Zahlenbeispielen erläutert. *Feyer* (Stuttgart).

**Hristow, Wl. K.: Die Mecklenburgischen Koordinaten (normale konforme Kegelprojektion).** Z. Vermessungswes., Stuttg. 72, 230—238 (1943).

Die Mecklenburgischen Koordinaten werden nach Potenzen der vom 0-Punkt der Mecklenburgischen Koordinaten aus gerechneten geographischen Koordinaten entwickelt und umgekehrt bis zu den 5. Potenzen einschließlich. Die Meridiankonvergenz wird nach Potenzen der Mecklenburgischen Koordinaten entwickelt bis zu den 5. Potenzen einschließlich. Die Abszisse  $x_M$  eines Punktes auf dem Bezugsmeridian wird nach Potenzen der vom Bezugsbreitenkreis aus gerechneten Meridianbogenlänge entwickelt bis zur 6. Potenz einschließlich. Durch Differentiation folgt die Entwicklung der Längenvergrößerung bis zur 5. Potenz einschließlich. Die zweitletzte Entwicklung wird umgekehrt bis zur 5. Potenz einschließlich; diese Umkehrung wird in die letzte Entwicklung eingesetzt. Damit ist die Längenvergrößerung nach Potenzen von  $x_M$  entwickelt bis zur 5. Potenz einschließlich. Wird in der 1. Entwicklung die geographische Länge = 0 gesetzt, so erhält man die Entwicklung der Abszisse  $x_M$  nach Potenzen der geographischen Breite. Setzt man diese Entwicklung in die zweitletzte ein, so erhält man die Entwicklung der Längenvergrößerung nach Potenzen der geographischen Breite. Wird in dieser Entwicklung die 3. eingesetzt, so erhält man die Entwicklung der Längenvergrößerung nach Potenzen der Mecklenburgischen Koordinaten. Diese Entwicklung wird auf den mittleren Krümmungsradius umgerechnet. Der Logarithmus der Längenvergrößerung wird das eine Mal nach Potenzen der geographischen Breite und das andere Mal nach Potenzen der Mecklenburgischen Koordinaten entwickelt. Geodätische Übertragung der Mecklenburgischen Koordinaten: Von einem Punkte  $x_1, y_1$  geht unter dem Richtungswinkel  $T_1$  die geodätische Strecke  $s$  aus; gesucht sind die Koordinaten  $x_2, y_2$  und der Richtungswinkel  $T_2$  des Endpunktes.  $x_2, y_2$  und  $T_2$  werden nach Potenzen von  $s \cos T_1$  und  $s \sin T_1$  entwickelt,  $x_2$  und  $y_2$  bis zu den 3. und  $T_2$  bis zu den 2. Potenzen einschließlich. Die Koeffizienten werden nach Potenzen der Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$  so weit entwickelt, daß in bezug auf  $s \cos T_1, s \sin T_1, x_1$  und  $y_1$  die Entwicklungen der Koordinaten  $x_2$  und  $y_2$  den Grad 4 und die Entwicklung des Richtungswinkels  $T_2$  den Grad 3 nicht überschreiten. Inverse Aufgabe zur geodätischen Übertragung: Gegeben sind die Punkte  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$ ; gesucht sind die Länge  $s$  der geodätischen Verbindungsstrecke und die Richtungswinkel  $T_1$  und  $T_2$ .  $s \sin \frac{T_1 + T_2}{2}, s \cos \frac{T_1 + T_2}{2}$  und  $T_2 - T_1$  werden nach Potenzen von  $x_2 - x_1$  und  $y_2 - y_1$  entwickelt,  $s \sin \frac{T_1 + T_2}{2}$  und  $s \cos \frac{T_1 + T_2}{2}$  bis zu den 3. und  $T_2 - T_1$  bis zu den 1. Potenzen einschließlich. Die Koeffizienten werden nach Potenzen der Mittelpunktskoordinaten  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  und  $\frac{y_1 + y_2}{2}$  so weit entwickelt, daß in bezug auf die gegebenen Koordinaten die Entwicklungen von  $s \sin \frac{T_1 + T_2}{2}$  und  $s \cos \frac{T_1 + T_2}{2}$  den Grad 4 und die Entwicklung von  $T_2 - T_1$  den Grad 3 nicht überschreiten. Die Bildpunkte  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  werden durch die Sehne verbunden. Die Länge der Sehne wird mit  $d$ , und die Richtungswinkel der Sehne werden mit  $t_{12}$  und  $t_{21}$  bezeichnet. Die Richtungsreduktionen  $\varphi_{12} = T_{12} - t_{12}$  und  $\varphi_{21} = T_{21} - t_{21}$  und die Entfernungsreduktion  $\log \frac{d}{s}$  werden nach Potenzen der Koordinatendifferenzen  $x_2 - x_1$  und  $y_2 - y_1$  entwickelt bis zu den 2. Potenzen einschließlich. Die Koeffizienten werden nach Potenzen der Mittelpunktskoordinaten  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  und  $\frac{y_1 + y_2}{2}$  so weit entwickelt, daß in bezug auf die Koordinaten  $x_1, y_1, x_2$  und  $y_2$  die Entwicklungen der Reduktionen den Grad 3 nicht überschreiten. Bei der geodätischen Übertragung mit Hilfe der Reduktionen braucht man zur Berechnung der Reduktionen genäherte Werte der Koordinaten  $x_2$  und  $y_2$ . Keine Restabschätzungen. *Ludwig* (Hannover).



## Topologie:

**Tietze, Heinrich:** Über spezielle Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen. *Mh. Math. Phys.* **51**, 1—14 (1943).

Die behandelten speziellen Knoten kann man auch als Zöpfe aus zwei Fäden bezeichnen; sie sind durch ihren Verdrillungssinn und die Minimalanzahl  $n$  ihrer Überkreuzungen als topologisch voneinander unterschieden erkennbar. Ist  $p$  ein Primfaktor von  $n$ ,  $n = p^\alpha m$ , ist  $\alpha$  ungerade und ist  $-m$  quadratischer Nichtrest modulo  $p$ , so ist  $p$  eine singuläre Primzahl von  $n$  bzw. des zugehörigen Zopfes. Die Frage ist nun, ob sich die singulären Primzahlen vorgeben lassen. Dies ist in der Tat der Fall. Sind  $p_1, p_2, \dots, p_a$  die vorgegebenen Primzahlen, so gibt es sogar unendlich viele Primzahlen  $q$ , so daß  $n = p_1 p_2 \dots p_a q$  die gewünschte Eigenschaft besitzt. Die Primzahl  $q$  muß gewissen Restklassen modulo den  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, a$ ) angehören. *K. Reidemeister* (Marburg-L.).

**Calugareanu, Georges:** Sur les invariants topologiques attachés aux courbes et surfaces fermées. *Disquisit. Math. et Phys., București* **2**, 149—167 (1942).

Die Untersuchung der topologischen Eigenschaften (im Großen) einer geschlossenen Kurve oder Fläche, die durch hinreichend oft differenzierbare Funktionen von Parametern gegeben sind, soll aus der analytischen Darstellung heraus systematisch durchgeführt werden, speziell sollen „Funktionale“ der Gebilde gefunden werden, die topologisch invariant sind. Hierzu werden die auftretenden topologischen Abbildungsfunktionen des Raums durch je eine Folge von Polynomen in den Koordinaten gleichmäßig approximiert gedacht. Die Invarianten gegenüber diesen polynomialen Abbildungen sind gewisse Lösungen von partiellen Differentialgleichungen, welche die Form der Eulerschen Gleichungen der Variationsrechnung haben. Alle vom Verf. gefundenen Invarianten sind bekannt oder trivial. Es wird ein rein analytischer Beweis (im obigen Sinn der Polynomapproximation) für die topologische Invarianz des Gaußschen Doppelkurvenintegrals, des den räumlichen Gesamtwinkel darstellenden Flächenintegrals und des curvatura integra-Integrals gegeben. *R. Furch* (Rostock).

**Hirsch, Guy:** Une propriété des points fixes des représentations de variétés en elles-mêmes. *Bull. Sci. math., II. s.* **67**, 158—168 (1943).

$T$  sei eine eindeutig-stetige Abbildung einer topologischen Mannigfaltigkeit  $M^n$  in sich, mit kompakter Fixpunktmenge. Es wird gezeigt, daß es eine zu  $T$  beliebig benachbarte und homotope Abbildung  $T$  mit endlicher Fixpunktzahl gibt.  $M^n$  braucht nicht triangulierbar zu sein, darf aber andererseits nicht den allgemeinen Charakter eines endlichen, homogen-dimensionalen Polyeders annehmen wie in einem entsprechenden Approximationssatz von H. Hopf (s. P. Alexandroff-H. Hopf, *Topologie I*, Berlin 1935, S. 543; dies. Zbl. **13**, 79). Beweismethode in enger Anlehnung an H. Hopf, *Math. Ann.* **100**, 579—608 (1928) unter Zufügung von vereinfachenden Varianten. *R. Furch* (Rostock).

**Mira Fernandes, A. de:** Funzioni continue sopra una superficie sferica. *Portugaliae Math.* **4**, 69—72 (1943).

H. Rademacher stellte die Frage, ob jeder beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge  $\mathfrak{R}$  ein Würfel umschrieben werden kann, d. h. ob es einen  $\mathfrak{R}$  enthaltenden Würfel gibt, dessen sämtliche Seitenebenen Stützebenen von  $\mathfrak{R}$  sind. S. Kakutani beantwortete [Ann. of Math., II. s. **43**, 739—741 (1942)] diese Frage bejahend durch folgenden Satz: Ist  $f(P)$  eine auf der Kugeloberfläche definierte, reelle, stetige Funktion, so gibt es drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  mit paarweise senkrechten Radien, für welche  $f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)$  ist. Verf. zeigt, daß hier die Worte „paarweise senkrecht“ durch „paarweise denselben vorgeschriebenen Winkel  $\lambda < \frac{2}{3}\pi$  einschließend“ ersetzbar sind.

Der Beweis ist — wie Verf. sagt — mutatis mutandis der Kakutanische für  $\lambda = \frac{\pi}{2}$ , er stützt sich auf die Homotopieklassen der geschlossenen Kurven topologischer Räume. Aus dem Satz folgt unmittelbar, daß der Punktmenge  $\mathfrak{R}$  auch ein symmetrisches Rhomboeder mit frei gewähltem Kantenwinkel  $\lambda$  umschrieben werden kann. *G. Hajós*.

**Eckmann, Benno:** Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme. *Comment. math. helv.* **15**, 318—339 (1943).

Ein Gleichungssystem  $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r < n$ ) habe als Koeffizienten stetige, reelle Funktionen  $a_{ik}(u)$  einer Variablen  $u$ , die einen Raum  $R$  durchläuft. Für alle  $u$  sei der Rang der Matrix  $(a_{ik})$  gleich  $r$ . Reelle, stetige Lösungen heißen linear unabhängig, wenn sie für alle  $u \in R$  linear unabhängig sind. Auf die Frage nach solchen Lösungen wird eine Teilantwort gegeben: Es gibt welche für  $r = n - 1$ , dsgl. bei geradem  $n$  für  $r = 1$ , dsgl. für  $n = 7$ ,  $r = 2$ . Beispiele: Die linearen Vektorprodukte im  $R_3$  und  $R_7$ . — Für den Fall, daß  $R$  in identischer Abbildung auf die Matrizen  $(a_{ik}(u))$  die Mannigfaltigkeit aller Koeffizientenmatrizen vom Rang  $r$  erschöpft, daß also auch die Lösungen  $(x_k(u))$  sich auf alle diese  $u$  erstrecken müssen, können Aussagen über die Nichtexistenz von lin. unabh. Lösungen gemacht werden (u. a. gibt es keine solche Lösungen für gerades  $n - r$ ). Als Anwendung zu nennen sind Existenzsätze für Nullstellen von Polynomen, die gewissen Relationen genügen. — Im Falle  $R = S^{n-1}$  (Sphäre),  $r = 1$ ,  $n$  ungerade wird die Frage nach der Maximalzahl  $l^*$  von linear unabhängigen Lösungen voll beantwortet (es kommen die Werte  $l^* = 0$  und  $l^* = n - 1$  vor), für gerades  $n$  werden über das alsdann immer positive  $l^*$  einige Aussagen bewiesen. Auch im Fall  $R = S^q$  (Sphäre allgem. Dimensionszahl) werden einige Angaben über  $l^*$  gemacht. — Der Fall, daß  $R$  ein in sich zusammenziehbarer Raum ist, wurde von Wazewski erledigt (dies. Zbl. **11**, 195). — Die Beweise benutzen die früher vom Verf. gewonnenen Ergebnisse über die Homotopiegruppen der gefaserten Mannigfaltigkeiten  $V_{n,m}$  aller reellen, orthogonalen Matrizen von  $n$  Kolonnen und  $m$  Zeilen.

*R. Furch* (Rostock).

**Ribeiro, Hugo:** Corrections à la note „Sur les espaces à métrique faible“. (*Port. Math.*, Vol. **4** (1943), Fasc. **1**, p. 21—40.) *Portugaliae Math.* **4**, 65—68 (1943).

Verf. gibt einige Berichtigungen zu seiner vor kurzem veröffentlichten Note über die Räume mit einer schwachen Metrik [*Portugaliae Math.*, **4**, 21—40 (1943); dies. Zbl. **28**, 191]. Außer den typographischen Fehlern ist insbesondere der Beweis eines Satzes (S. 33 in der ersten Note) zu korrigieren; dabei verwendet Verf. eine von P. Urysohn [*Math. Ann.*, **94**, 262—295 (1925)] gebrauchte Konstruktion. Alle in der ersten Note publizierten Sätze bleiben gültig.

*Ky Fan* (Paris).

**Fan, Ky:** Nouvelles définitions des ensembles possédant la propriété des quatre points et des ensembles filiformes. *Bull. Sci. math.*, II. s. **67**, 187—202 (1943).

In früheren Arbeiten (dies. Zbl. **26**, 274 und **27**, 269) hatte Verf. die Mengen mit 4-Punkt-Eigenschaft, insbesondere die fadenförmigen (vgl. das Referat in Zbl. **27**, 269) durch Eigenschaften ihrer zusammenhängenden Teilmengen gekennzeichnet, wobei insbesondere auch auf die einpunktigen Mengen Bezug genommen wurde. In vorliegender Arbeit wird diese letztere Bezugnahme vermieden. Die betrachteten Mengen  $E$  sollen zusammenhängende mehrgipflige F. Rieszsche Räume sein. Wir bezeichnen für drei Teilmengen von  $E$  als „Eigenschaft  $A$ “: mindestens eine ist in der Summe der beiden anderen enthalten; als „Eigenschaft  $B$ “: mindestens eine enthält den Durchschnitt der beiden anderen. Sätze: I.) Es besitzt  $E$  die 4-Punkt-Eigenschaft, wenn und nur wenn entweder (1) irgend 3 zusammenhängende Teile mit nichtleerem Durchschnitt die Eigenschaft  $A$  besitzen oder (2) jeder echte zusammenhängende mehrgipflige Teil fadenförmig ist oder (3) irgend 3 zusammenhängende Teile  $X, Y, Z$  mit  $X + Y + Z \neq E$  die Eigenschaft  $B$  besitzen. — II.) Es ist  $E$  fadenförmig, wenn und nur wenn entweder (1) irgend 3 zusammenhängende Teile die Eigenschaft  $B$  besitzen oder (2) irgend 3 zusammenhängende, paarweise nicht fremde Teile die Eigenschaft  $A$  besitzen oder (3) irgend 3 zusammenhängende Teile  $X, Y, Z$  mit  $X + Y \neq E$ ,  $Y + Z \neq E$ ,  $Z + X \neq E$  die Eigenschaft  $B$  besitzen oder (4) falls  $E$  die 4-Punkt-Eigenschaft besitzt, der Durchschnitt irgend zweier, nicht fremder, zusammenhängender Teile zusammenhängend ist.



— III.) Bezeichnet man als „maximal zusammenhängend“ jeden zusammenhängenden Teil  $F \subset E$  mit  $F \neq \emptyset$ , für welchen kein zusammenhängendes  $G$  existiert mit  $F \subset G \subset E$  und  $F \neq G \neq E$ , so gilt: Besitzt  $E$  die 4-Punkt-Eigenschaft, so ist die Anzahl  $m$  der maximal zusammenhängenden Teile 0, 1, 2 oder  $\infty$ ; für fadenförmige  $E$  ist nur  $m \leq 2$  möglich. — IV.) Ist  $E$  überdies lokal zusammenhängend, so kann in I.), (1) und (3) sowie in II.) (1), (2) und (3) „zusammenhängender Teil“ durch „Gebiet“ ersetzt werden. — V.) Ein zusammenhängender, „accessibler“ Raum  $R$  ist topologisches Strecken-, Halbgeraden-, Geraden- oder Kreisbild bzw. topologisches Strecken-, Halbgeraden- oder Geradenbild, wenn und nur wenn  $R$  eine abzählbare, aus lauter Gebieten bestehende Basis besitzt und den Bedingungen in I.), (1) oder (3) bzw. in II.), (1), (2) oder (3) für Gebiete genügt. Haupt (Erlangen).

**Choquet, Gustave:** Structure des domaines plans et accessibilité. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 279—280 (1943).

Afin d'étudier la structure d'un domaine plan  $\Delta$ , l'aut. lui associe plusieurs espaces topologiques lui permettant de rendre compte des propriétés topologiques internes et externes et des propriétés d'accessibilité de la frontière  $\Phi$ ; il donne des conditions nécessaires et suffisantes d'homéomorphie de ces espaces pour deux domaines  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Dans le cas où  $\Delta$  est simplement connexe il introduit pour une répartition quelconque des points de  $\Phi$  en deux arcs complémentaires  $K_1$  et  $K_2$  du cycle d'ordre de  $\Phi$  le lieu des points de  $\Delta$  qui sont centres de cercles de  $\Delta$  dont la circonférence touche  $K_1$  et  $K_2$  (courbe d'équidistance) et indique quelques propriétés de ces courbes. Pauc (Erlangen).

**Choquet, Gustave:** Topologie de la représentation conforme. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 330—331 (1943).

Dans cette note faisant suite à la précédente est introduite la notion de sinuosité d'un arc d'accès en un point frontière  $M$  d'un domaine  $\Delta$ , notion faisant intervenir une fonction arbitraire, et appliquée aux courbes d'équidistance d'extrémité  $M$ ; un second théorème fournit une propriété de limitation de la sinuosité pour une homéomorphie entre espaces auxiliaires liés à deux domaines  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . Par homéomorphie régulière entre un domaine plan simplement connexe  $\Delta$  et un cercle ouvert  $\delta$ , l'aut. entend une homéomorphie qui respecte des propriétés d'accessibilité de ces domaines comme le font une représentation conforme ou quasi-conforme. Il énonce le théorème suivant: Deux homéomorphismes réguliers de  $\Delta$  sur deux cercles  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont topologiquement équivalentes c'est-à-dire que l'homéomorphie engendrée entre  $\delta_1$  et  $\delta_2$  par ces deux homéomorphismes peut s'étendre aux frontières  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . A toute homéomorphie régulière est associé un espace distancié; en liaison avec la considération de l'espace complet correspondant sont données les définitions de „bout premier“ et „d'ensemble principal“; un théorème les concernant conclut cette note. Pauc (Erlangen).

**Choquet, Gustave:** Représentation conforme et topologie. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 402—404 (1943).

A une homéomorphie régulière (cf. note précédente) entre le domaine  $\Delta$  et le cercle ouvert  $\delta$  sont attachés des sous-ensembles  $A, B, C, D$  de la frontière  $\varphi$  de  $\delta$  dont l'auteur étudie les propriétés topologiques. Pauc (Erlangen).

## Klassische theoretische Physik.

### Mechanik:

**Tolotti, Carlo:** Alcune proprietà degli assi d'equilibrio di Möbius. Atti Accad. Italia, Rend., VII. s. 3, 223—228 (1942).

$S$  sei ein Kräftesystem, das im Gleichgewicht ist und auf einen starren Körper  $C$  einwirkt;  $S$  soll ferner vektoriell invariant bleiben bei jeder Verschiebung von  $C$ . Die Untersuchung der Rotationsachsen, die  $S$  im Gleichgewicht lassen, führt bekanntlich auf folgende Klassifikation aller Rotationsachsen: a) Achsen, für welche jede Rotation

um einen Winkel  $\varphi (\neq 0)$  das Gleichgewicht zerstört; b) Achsen, für welche mindestens die Rotation um den Winkel  $\varphi = \pi$  (außer natürlich  $\varphi = 0$ ) das Gleichgewicht von  $S$  bewahrt (Siaccische Achsen); c) Achsen, bei welchen das Gleichgewicht erhalten bleibt bei Rotation um einen beliebigen Winkel (Möbiussche Achsen). Nun bestimmt Verf., wie sich die Achsen von Siacci und Möbius verändern, wenn  $C$  so verschoben wird, daß er im Gleichgewicht in bezug auf  $S$  bleibt. Neben zwei allgemeinen Sätzen wird dabei die Möglichkeit, daß Möbiussche Achsen verschwinden oder erscheinen können, an Beispielen hervorgehoben. Conforto (Rom).<sup>oo</sup>

**Lintes, I.:** Notes sur quelques questions techniques concernant des bouches à feu. Bull. sci. École polytechn. Timişoara **11**, 78—80 (1943).

Die Bemerkungen beziehen sich auf Näherungsformeln für den maximalen Wirkungsgrad von Geschützen (Verhältnis von Geschößwucht zur freigewordenen Pulverenergie) und für die maximale Geschößgeschwindigkeit nach Verlassen des Rohres, wobei während der Gasdrucknachwirkung linearer Geschwindigkeitsanstieg angenommen wird. Knöll (Flensburg-Mürwik).<sup>oo</sup>

**Stumpff, K.:** Untersuchungen über das Problem der speziellen Störungen in den rechtwinkligen Koordinaten. Astron. Nachr. **273**, 105—112 (1942).

Verf. hat in Astr. Nachr. **243**, 317—336 (1931); **244**, 433—464 (1932) (dies. Zbl. **2**, 435; **4**, 419) eine Methode der Bahnbestimmung entwickelt, die die Laplace-Harzersche und Wilkessche Methode in sich vereinigt. Sie besteht in der Ermittlung der Koordinaten und ihrer Ableitungen und legt Taylorentwicklungen derselben zugrunde. Das aufgestellte Formelsystem konnte Verf. sowohl zu einer ersten Näherungsrechnung wie zu einer Bahnverbesserung verwenden, falls der Bogen, über den die vorliegenden Beobachtungen sich erstreckten, nicht zu groß war und die Störungen durch Jupiter und die anderen großen Planeten noch nicht merkbar waren. In der vorliegenden Arbeit leitet Verf. Näherungsformeln für die Jupiterstörung in den rechtwinkligen Koordinaten ab, deren Restglieder von der 4. Ordnung in den Zwischenzeiten sind und die für mäßig große Intervalle (120—160 Tage) genau genug sind. Verf. gibt zuerst ohne weitere Untersuchung die ungestörte Koordinatenentwicklung  $(x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)})$  an. Ist nun ein störender Körper (Jupiter, Masse  $m_1$ ) vorhanden, dessen Bewegung für die Zwecke der Störungsrechnung genau genug durch eine Keplerbahn bestimmt werden darf — seine Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten zur Oskulationsepoche seien  $x_1, y_1, z_1; x'_1, y'_1, z'_1$  — so lauten die auf den Sonnenmittelpunkt bezogenen Bewegungsgleichungen

$$x'' = -x r^{-3} - m_1 (\xi_1 \varrho_1^{-3} + x_1 r_1^{-3}); \quad x'_1 = -(1 + m_1) x_1 r_1^{-3} \text{ usw.,}$$

wo  $r_1$  der Radiusvektor von  $m_1$ ,  $\varrho_1$  der Abstand des Planeten von  $m_1$  und  $\xi_1 = x - x_1$  ist. Hieraus berechnet Verf. die höheren Ableitungen der Koordinaten des gestörten Planeten bis zur 5. Ordnung. Die einzelnen Glieder sind solche, die von der störenden Masse frei sind (Glieder der ungestörten Entwicklung) und solche, die  $m_1$  bzw.  $m_1^2$  enthalten. Die Glieder mit  $m_1^2$  werden außer Acht gelassen, die mit  $m_1$  in drei Gruppen aufgespalten, je nachdem sie die Größen  $\xi_1, \varrho_1$  oder die Bahngrößen des störenden Planeten  $x_1, r_1$  oder beide gemeinsam enthalten. Damit gewinnt Verf. die Entwicklungsformel

$$(a) \quad x(\tau) = \bar{x}(\tau) + m_1 \{ \bar{\xi}_1(\tau) - (\xi_1 + \xi'_1 \tau) + \bar{x}_1(\tau) - (x_1 + x'_1 \tau) \} + R_x(\tau),$$

wo

$$\bar{x}(\tau) = xF(r) + x'G(r), \quad \bar{\xi}_1(\tau) = \xi_1 F(\varrho_1) + \xi'_1 G(\varrho_1), \quad \bar{x}_1(\tau) = x_1 F(r_1) + x'_1 G(r_1)$$

und  $F(r), G(r)$  die aus der oben erwähnten Koordinatenentwicklung der Keplerbahn bekannten Reihen darstellen. Bis auf höhere Glieder der Masse ist also  $\bar{x}(\tau)$  die Jupiterkoordinate,  $\bar{\xi}_1(\tau)$  die Koordinate einer fiktiven Planetenbahn um Jupiter als Zentrum, die sich ergeben würde, wenn Jupiter die Masse der Sonne hätte und die jovizentrischen Koordinaten und Geschwindigkeiten des Planeten zur Oskulationsepoche als Anfangsbedingungen für die fiktive Bahn genommen werden.



Soweit die Restglieder  $R(\tau)$  sehr klein werden und daher vernachlässigt werden können, kann die Formel (a) mit  $R_x(\tau) = 0$  für alle Zwecke der erweiterten Bahnbestimmung eines normalen Planeten benutzt werden. Mit zunehmendem  $\tau > 120^a$  kann man die Restglieder  $R_x(\tau)$  nicht mehr vernachlässigen; weil die letzteren aber nur von der 4. Ordnung sind, sind sie beträchtlich kleiner als die Störungen selbst, die von der 2. Ordnung sind. Dies gilt für Zeiträume, die erheblich größer sind als die bei der Bahnverbesserung aufgetretenen. Man kann also versucht sein, diese Restglieder an Stelle der Störungen zu integrieren. Wie an dem Beispiel 931 Whitemora, das von Stracke in seinem bekannten Lehrbuch wiederholt angewendet worden ist, gezeigt wird, wachsen die Integrale der Restglieder zuerst sehr langsam an und bleiben lange Zeit größenordnungsmäßig unter den Gesamtstörungen. Dieses Beispiel gibt noch zu weiteren Folgerungen Veranlassung, die zu eingehenderen Betrachtungen der Frage der Koordinatenentwicklung überhaupt und der Taylorentwicklung im besonderen im Falle der ungestörten Keplerbahn Veranlassung geben, welche Verf. in Aussicht stellt. Volk.

### Elastizität, Akustik:

Parodi, Hippolite: Sur une solution particulière des équations de l'élasticité. C. R. Acad. Sci., Paris **216**, 172—173 (1943).

Macht man für die elastischen Verschiebungen  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) den Ansatz

$$u_i = (l_i x + m_i y + n_i z) f(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z),$$

wobei  $f$  eine Potentialfunktion bedeutet, und bestimmt die zwölf Konstanten so, daß sie den Relationen

$$\sum \alpha_i^2 = 0, \quad \sum \alpha_i l_i = 0, \quad \sum \alpha_i m_i = 0, \quad \sum \alpha_i n_i = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \alpha_i (l_i + m_i + n_i) + 2\mu (l_i \alpha_1 + m_i \alpha_2 + n_i \alpha_3) = 0$$

genügen ( $\lambda$  und  $\mu$  sind die Laméschen Elastizitätskonstanten), so können die Elastizitätsgleichungen voll befriedigt werden. Für die Normal- und Schubspannungen erhält man dann die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} N_1 &= [(\lambda + 2\mu)l_1 + \lambda m_2 + \lambda n_3]f + 2\mu\alpha_1[l_1 x + m_1 y + n_1 z]f', \\ N_2 &= [\lambda l_1 + (\lambda + 2\mu)m_2 + \lambda n_3]f + 2\mu\alpha_2[l_2 x + m_2 y + n_2 z]f', \\ N_3 &= [\lambda l_1 + \lambda m_2 + (\lambda + 2\mu)n_3]f + 2\mu\alpha_3[l_3 x + m_3 y + n_3 z]f'; \\ T_1 &= (m_3 + n_2)f + [x(\alpha_2 l_3 + \alpha_3 l_2) + y(\alpha_2 m_3 + \alpha_3 m_2) + z(\alpha_2 n_3 + \alpha_3 n_2)]f', \\ T_2 &= (n_1 + l_3)f + [x(\alpha_3 l_1 + \alpha_1 l_3) + y(\alpha_3 m_1 + \alpha_1 m_3) + z(\alpha_3 n_1 + \alpha_1 n_3)]f', \\ T_3 &= (l_2 + m_1)f + [x(\alpha_1 l_2 + \alpha_2 l_1) + y(\alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1) + z(\alpha_1 n_2 + \alpha_2 n_1)]f'. \end{aligned}$$

Wegner (Heidelberg).<sup>oo</sup>

Tonolo, A.: Contributo alla teoria dell'elasticità di corpi solidi. Atti Ist. Veneto Sci. etc. **100**, Pt 2, 385—395 (1941).

Sind die Elementarteilchen eines elastischen Kontinuums neben dem Spannungstensor und dem Vektor der Massenkraft noch einem Momentenvektor unterworfen, so gelten die von Somigliana hergeleiteten Gleichgewichtsbedingungen. Verf. gibt eine Darstellung der Gleichungen in krummlinigen Koordinaten. H. Neuber.<sup>oo</sup>

Hruban, K.: Der Spannungszustand des im Innern beanspruchten Halbraumes. Ing.-Arch. **14**, 9—13 (1943).

Für den durch eine freie ebene Oberfläche begrenzten elastischen Halbraum werden Spannungsfunktionen angegeben, welche sich auf eine normal zur Oberfläche gerichtete, im Innern angreifende Einzellast sowie auf ein im Innern befindliches Druckzentrum beziehen. Beide Fälle stehen mit gewissen Problemen der Bodenmechanik in Zusammenhang. H. Neuber (Braunschweig).<sup>oo</sup>

**Weber, Constantin:** Halbraum mit Halbkugelbelastung. Z. angew. Math. Mech. 22, 318—321 (1942).

Verf. zeigt, daß die in der Arbeit von Usunoff (dies. Zbl. 28, 253) vorkommenden Integrale durch Umwandlung des rotationssymmetrischen in ein zweidimensionales Problem in geschlossener Form ausgewertet werden können.

F. Chmelka (Wien).<sup>oo</sup>

**Borowicka, H.:** Über ausmittig belastete, starre Platten auf elastisch-isotropem Untergrund. Ing.-Arch. 14, 1—8 (1943).

Durch eine naheliegende Modifikation der bekannten Boussinesqschen Formeln für die Druckverteilung unter dem auf der Halbebene oder dem Halbraum aufsitzenden, zentrisch belasteten starren Stempel erhält man die entsprechenden Ausdrücke für den exzentrisch belasteten Stempel. Der Nachweis ist relativ einfach in zwei, komplizierter in drei Dimensionen, weil hier der Verlust der Rotationssymmetrie das neue Problem sehr viel schwieriger macht als das Boussinesqsche. Schaubilder zeigen den Verlauf der Druckverteilung, die an den Plattenenden die bekannte Unendlichkeitsstelle aufweist, über der Plattenerstreckung mit der Lastexzentrizität als Parameter. Bemerkenswert ist, daß der Plattenstreifen bei einer Exzentrizität von  $\frac{1}{2}$ , die Kreisplatte bei  $\frac{1}{3}$  sich abzuheben beginnt. Im Zweidimensionalen wird die Lösung auch für die abgehobene Platte noch angegeben.

Marguerre (Adlershof).<sup>oo</sup>

**Wegner, Udo:** Ein neues Verfahren zur Berechnung der Spannungen in Scheiben. Forsch. Ing.-Wes. 13, 144—149 (1942).

Eine ebene biharmonische Funktion  $F$  macht das Integral

$$\iint [\Delta(F - G)]^2 dx dy$$

(hierin ist  $G$  eine vorgegebene Funktion) zum Minimum, wenn die Funktion  $H = F - G$  die Randbedingungen  $H = 0$  und  $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$  erfüllt. Umgekehrt sind diese Randbedingungen um so genauer befriedigt, je weniger das Integral von seinem extremalen Wert abweicht. Verf. verwertet diesen Zusammenhang bei Spannungsproblemen der ebenen Elastizitätstheorie. Eine angenäherte Lösung des Extremalproblems

$$\iint (\Delta H)^2 dx dy = \text{Min.}$$

liefert im Falle der Plattengleichung mit  $\Delta w = p/D$  ( $w$  = Durchbiegung,  $p$  = Belastung,  $D$  = Steifigkeit) mit  $H = w$ ,  $\Delta G = p/D$  (für  $G$  kann jedes partikuläre Integral dieser Gleichung eingesetzt werden) eine Näherungsfunktion für den Verlauf von  $\Delta w$  bei der in Frage stehenden allseitig eingespannten Platte unter der Belastung  $p$ . Im Falle der beliebig belasteten Scheibe ist für  $G$  irgendeine, den jeweils vorgegebenen Randbedingungen genügende Funktion einzusetzen.  $\Delta F = \Delta G + \Delta H$  liefert dann die Summe der beiden Hauptspannungen. Die Lösung wird in jedem Falle so durchgeführt, daß für  $\Delta F$  eine endliche Folge von Potentialfunktionen  $P_n$  gesetzt wird:

$$\Delta F = \sum_n c_n P_n.$$

Die Variation des Integralwertes nach den  $c_n$  führt für diese auf  $n$  lineare Gleichungen, welche zweckmäßig mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus zu lösen sind. — Bedingungen der Konvergenz des Verfahrens sind noch nicht erörtert. Als Beispiele sind die quadratische Platte und die Scheibe mit Halbkreis Kerbe behandelt. H. Neuber.<sup>oo</sup>

**Müller, Wilh.:** Zur Biegungstheorie einer Rohrflanschverbindung. Ing.-Arch. 13, 185—197 (1942).

In der Flanschverbindung zweier Rohre werden durch die Zugkräfte der Schrauben umstülpende Momente auf die Flansche ausgeübt, die teils durch den Flansch selbst aufgenommen werden, teils durch die zylindrische Rohrwand. Dieser Spannungszustand wird unter der vereinfachenden Annahme untersucht, daß sich die Schraubenkräfte kontinuierlich über eine Kreislinie verteilen, die mit dem Außenrand des Flansches zusammenfällt oder nicht. Der Flansch wird als Kreisringplatte, die Rohrwand



als einseitig unendlich lange Zylinderschale behandelt. Für das zwischen beiden übertragene Einspannmoment und für den Verlauf der Biegemomente im Flansch in Abhängigkeit von den gegebenen Größen werden Kurventafeln gebracht. *Flüge.*°°

**Dick, J.:** The transverse of a helical spring with pinned ends and no axial load. *Philos. Mag.*, VII s. 33, 513—519 (1942).

Der Verf. untersucht die Querschwingungen einer zylindrischen Schraubenfeder mit eingespannten Enden ohne Axialbelastung unter Berücksichtigung der in den Drahtquerschnitten auftretenden Querkkräfte sowie der Drehträgeit der Längenelemente des Federdrahts. Ausgehend von den genauen Bewegungsgleichungen für ein Längenelement ergeben sich zwei Arten von Querschwingungen: Bei der ersten Art haben die Verformungen durch das Biegemoment und durch die Querkraft in jedem Augenblick dasselbe Vorzeichen, bei der zweiten haben sie verschiedenes Vorzeichen, wobei die Verformung durch die Querkraft die zahlenmäßig größere ist. Die übliche Näherungsrechnung, bei der Querkraft und Drehträgeit der Federdrahtelemente außer Acht gelassen werden, liefert gute Ergebnisse bei der ersten Schwingungsart, wenn der Abstand zwischen zwei benachbarten Schwingungsknoten groß ist gegenüber dem Windungsdurchmesser der Feder. *Kimmel (Stuttgart).*°°

**Woinowsky-Krieger, S.:** Kippschwingungen und dynamische Kippstabilität der I-Träger bei Belastung durch Endmomente. *Ing.-Arch.* 13, 197—210 (1942).

Ein in seiner Stegebene durch Endmomente (und gegebenenfalls Längskräfte) belasteter I-Träger kann zusammengesetzte Biege- und Torsionsschwingungen ausführen, die nicht unabhängig voneinander verlaufen, sondern sich wie gekoppelte Schwingungen verhalten; sie werden Kippschwingungen genannt. Ist die Belastung zeitlich konstant, so führt der Träger freie Schwingungen aus, deren Frequenzen bei den kritischen Werten der Last (Moment- oder Längskraft) verschwinden. Die bei Schwingungsbelastungen entstehenden „erzwungenen“ Schwingungen werden durch lineare Differentialgleichungen 4. Ordnung mit periodisch veränderlichen Koeffizienten beschrieben. Die Lösung solcher Differentialgleichungen nach der Floquetschen Theorie wird kurz erläutert. Für zwei einfache Sonderfälle (1. Biegeeigenfrequenz gleich Torsionseigenfrequenz; 2. Längskraft konstant, Endmoment harmonisch veränderlich) werden die Stabilitätsgebiete der Lösungen erörtert. *K. Klotter.*°°

● **Gehler, Willy:** Festigkeitslehre. Bd. 1: Elastizität, Plastizität und Festigkeit der Baustoffe und Bauteile. Unter Mitarbeit von W. Herberg. (Samml. Göschen Bd. 1144.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1942. 150 S. u. 118 Abb. geb. RM. 1.62.

Das Kennzeichen der modernen Auffassung der Festigkeitslehre ist das immer stärkere Hervortreten der Gesetze und Eigenschaften der bildsamen Verformung der Werkstoffe in Konstruktion und Fertigung, die allmählich als gleichberechtigtes Gebiet der reinen Elastizitätstheorie an die Seite tritt. Auch die vorliegende Darstellung steht auf diesem Standpunkte, der vor allem in den ersten Teilen zu Geltung kommt, während in den späteren die ältere, rein elastische Auffassung wieder in den Vordergrund tritt. — Inhalt: 1. Einleitung und Grundbegriffe, 2. Zug und Druck, 3. Schub, 4. Biegung, 5. Verdrehung, 6. Zusammengesetzte Festigkeiten, 7. Kern. — Das Bändchen gibt im Verhältnis zu seinem knappen Umfang einen reichhaltigen Überblick über das ganze Gebiet und enthält vielfach Originaluntersuchungen des erstgenannten Verfassers.

*Th. Pöschl (Karlsruhe).*

**Buchholtz, Herbert:** Die Ausbreitung der Schallwellen in einem Horn von der Gestalt eines Rotationsparaboloides bei Anregung durch eine im Brennpunkt befindliche punktförmige Schallquelle. *Ann. Physik*, V. F. 42, 423—460 (1943).

Im Brennpunkt eines Rotationsparaboloides wird eine einfache Schallstrahlungsquelle angeordnet. Verf. führt rotationsparaboloidische Koordinaten ein und schreibt für den Schallüberdruck in jedem Punkt die Wellengleichung in diesen Koordinaten an, wobei die Drehsymmetrie berücksichtigt wird. Der gesamte Ausdruck für den Schallüberdruck in jedem Punkt wird in zwei Anteile aufgespalten: einen ersten Anteil, der

ohne Paraboloid von der Schallquelle erzeugt würde, und einen zweiten Anteil, der von der Reflexionswirkung des Paraboloides herrührt. Der erste Anteil, eine Kugelwelle, wird in Gestalt eines unendlichen Integrales geschrieben, dessen Integrand das Produkt zweier Whittakerscher Funktionen der Paraboloidkoordinaten enthält. Auch für die durch Reflexion entstandenen Anteile wird ein analoger Integralausdruck, jedoch mit einer zunächst nach unbekannten Funktion im Integranden, angeschrieben. Durch die Randbedingungen an der Innenoberfläche des Paraboloides läßt sich letztere Funktion mit Hilfe des Integranden des zuerstgenannten Integrales berechnen. Verf. gelangt schließlich zu einem Integralausdruck für die Gesamtlösung. Zur Auswertung dieses Integrales werden die Singularitäten des Integranden bestimmt, für eine der Paraboloidfunktionen im Integranden wird eine bereits früher angegebene Reihenentwicklung nach Besselschen Funktionen benutzt, welche auch numerische Rechnungen (Kurven und Zahlentafeln) erlaubt. Unter Verwendung des Cauchyschen Residuensatzes gelingt die Auswertung des Integrales für die verschiedenen Gebiete im Paraboloid und erhält Verf. unendliche Reihen für die Lösung. Aus diesen Reihen werden verschiedene akustische Ausdrücke berechnet. Die Anwendung des Residuensatzes zur Auswertung des Integrales wird in einem mathematischen Anhang durchgeführt. *M. J. O. Strutt.*

### Hydrodynamik:

**Cârstoiu:** Nouveaux points de vue sur quelques théorèmes fondamentaux de la mécanique des fluides. *Bul. Politehn., Bucureşti* **13**, 42—45 (1942).

Unter der Voraussetzung konservativer Massenkräfte [ $\vec{g} = \text{grad } U(x, y, z, t)$ ] und unter der Annahme, daß die Dichte  $\rho$  einer vollkommenen Flüssigkeit eine Funktion des Druckes  $p$  und der Lagevektor  $\vec{r}$  eine Funktion der Anfangskoordinaten und der Zeit ist,  $\vec{r} = \vec{r}(a, b, c, t)$ , werden aus der Beziehung

$$\vec{v} d\vec{r} - \vec{v}_0 d\vec{r}_0 = d\chi \quad \text{mit} \quad \chi = \int_{t_0}^t \left( U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 \right) dt,$$

welche zum Ausdruck bringt, daß die Variation der Elementararbeit der Geschwindigkeit in jedem Augenblick ein totales Differential darstellt, der Zirkulationssatz von Lagrange, die Cauchyschen Gleichungen und die Bernoullische Gleichung hergeleitet.

*Garten (Leipzig).*

**Wieghardt, K.:** Über Kapillarwellen mit Oberflächenzähigkeit. *Physik. Z.* **44**, 101 bis 115 (1943).

Da Verf. in einer Arbeit von A. Klemm (dies. Zbl. **20**, 81) über diesen Gegenstand keine genügenden Grundlagen erblickt, nimmt er die Berechnung der Kapillarwellen mit statischer und dynamischer Oberflächenspannung exakt im Sinne der üblichen Linearisierung durch Beschränkung auf kleine Amplituden in Angriff. Für die Oberflächenspannung wird ein Ansatz benutzt, in dem die Wirkungen der Relaxation nicht berücksichtigt werden. Die Relaxationszeit soll also klein sein im Vergleich zur reziproken Kreisfrequenz. Verf. untersucht insbesondere fortschreitende, zweidimensionale Wellen auf einer sehr tiefen, zähen und schweren Flüssigkeit, deren Amplituden so klein sind, daß in den Gleichungen die quadratischen Glieder gegen die linearen vernachlässigt werden können. Er geht dabei von den Navier-Stokesschen Gleichungen aus und berücksichtigt die Oberflächen- und Schubspannungen an der Flüssigkeitsoberfläche. Die Ergebnisse der Rechnung werden für eine Reihe von Sonderfällen an Hand von Kurvenbildern diskutiert in bezug auf Kreisfrequenz, Halbwertszeit, Geschwindigkeitsprofil und Verteilung der mittleren Dissipation. *M. J. O. Strutt.* °°

**Schiel, Friedrich:** Der durch Kapillarkwirkung bedingte Zusammenhalt zweier benetzter Körper. *Z. angew. Math. Mech.* **23**, 200—209 (1943).

Verf. setzt im allgemeinen stetige Krümmungen für die beiden Körperoberflächen voraus, beschränkt sich jedoch nicht auf elliptische Punkte. Um die Berührungsver-



hältnisse leichter zu übersehen, verwendet Verf. eine zeichnerische Darstellung des Eulerschen Satzes über die Krümmungen der Normalschnitte einer Fläche. — Sind dann die beiden Körperoberflächen mit einer benetzenden Flüssigkeitsschicht bedeckt, so werden durch die Oberflächenspannung Kräfte hervorgerufen, die zwischen den beiden Körpern wirken. Dabei besteht zwischen den Normalkrümmungen und den Normalspannungen des erwähnten Spannungszustandes weitgehende Analogie. Insbesondere konvergiert die Kontur des Flüssigkeitsrestes in der Umgebung des Berührungspunktes in die Dupinsche Indikatrix im Berührungspunkt, wenn die Begrenzung eines der beiden Körper eben ist. Im allgemeinen Falle betrachtet Verf. den geometrischen Ort gleicher Abstände  $z$  der beiden Flächen, welcher ebenfalls mit kleiner werdendem  $z$  der Gestalt eines Kegelschnittes zustrebt. Entsprechend dieser Berührungskennfigur sind elliptische, parabolische und hyperbolische Berührungen der beiden Körper zu unterscheiden. — Die Kapillarkräfte suchen die beiden Körper so aufeinander abzuwälzen und zu drehen, daß eine gegebene, den Berührungspunkt umgebende kleine Flüssigkeitsmenge eine möglichst große Fläche in Form der Berührungskennfigur bedeckt. Das bedeutet ein möglichst flaches Aneinanderlegen der beiden Körper. Die Haftungskraft, die mit abnehmender Krümmung zunimmt, ist in der stabilen Gleichgewichtslage am größten. Ist der eine Körper eben oder kugelig gekrümmt (Nabelpunkt!), so findet kein Drehen, sondern nur ein Abwälzen statt. Es erfolgt längs der „Krümmungslinien“ des anderen Körpers in der Richtung der stärksten Abnahme des Gaußschen Krümmungsmaßes. Wenn die den Berührungspunkt umgebende Flüssigkeitsmenge abnimmt und allmählich verschwindet, strebt die Haftungskraft einem endlichen Grenzwert zu, während die abwälzenden und drehenden Kräfte Null werden. — Die gefundenen Erscheinungen verwendet Verf. schließlich noch, um die Krümmungslinien einer Fläche in Evidenz zu setzen. Dazu wird ein flachgedrückter Spindelkörper benutzt. Wird dieser „Krümmungskompaß“ auf eine benetzte Fläche gelegt, so dreht er sich in die Richtung des einen Hauptnormalschnittes der Fläche. Denkt man sich die Fläche als sehr dünne Schale körperlich verwirklicht und legt auf den gegenüberliegenden Punkt der benetzten Rückseite den Krümmungskompaß, so zeigt er die Richtung des anderen Hauptnormalschnittes an. In Nabelpunkten bleibt der Krümmungskompaß in jeder Lage in Ruhe.

*M. Pinl* (Braunschweig).

**Schiel, Friedrich: Der schwimmende Balken.** *Z. angew. Math. Mech.* **22**, 255—262 (1942).

Die Arbeit bringt Analogieschlüsse zwischen gewichtslosen, auf einer Flüssigkeit schwimmenden Balken und Balken auf nachgiebiger Unterlage, wie sie z. B. bei Berechnung von Bauwerken auf nachgiebigem Baugrund in Erscheinung treten. Da die Untersuchung des Balkens, der auf dem gleichmäßig federnden bzw. elastisch-isotropen Halbraum aufliegt, mit großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden ist, wird der Versuch gemacht, diese Aufgabe mit Hilfe von Näherungslösungen — die auf Grund der Theorie schwimmender Balken leicht erfaßbar sind — zu lösen. Dabei wird gezeigt, daß der Wieghardtsche Ansatz, der nicht auf der einfachen Bettungsziffertheorie fußt, sondern auch die Druckausbreitung berücksichtigt, dabei aber nur mit einem schwierigeren mathematischen Apparat erhalten werden kann, mit der Differentialgleichung bzw. Integralgleichung des schwimmenden Balkens bei Berücksichtigung des hydrostatischen Druckes und der Oberflächenspannung vollkommen übereinstimmt. — Die angegebenen Gleichungen beinhalten zugleich auch eine Erweiterung des alten Ansatzes nach der Bettungsziffertheorie, zumal die Verformungen außer von der Bettungsziffer — die dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit entspricht — noch von einer zweiten Konstanten, nämlich von der Länge der konstanten Subtangente einer Exponentialkurve bzw. Funktion, die in dem Ausdruck für die Einsenkung unter einer freien Flüssigkeitsoberfläche auftritt, abhängig gemacht werden. Die konstante Subtangente steht dabei mit der Bettungsziffer bzw. dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit und der Oberflächenspannung der Flüssigkeit in einer einfachen

Beziehung. — Auch die Werte, die Schleicher bei der Berechnung des schwimmenden Balkens ohne Biegesteifigkeit erhält, bei dem die Einsenkung der Flüssigkeitsoberfläche bei gleichmäßig verteilter Belastung die Form einer Kettenlinie annimmt, sowie jene Werte, die Schleicher für die mittlere Einsenkung von gleichmäßig belasteten rechteckigen Bereichen des Halbraumes erhielt, werden durch entsprechende Wahl der beiden Parameter, der Bettungsziffer und der Subtangente, mit der gegebenen Näherungslösung verglichen und in Übereinstimmung gebracht. Ein Vergleich der durchgerechneten Zahlenbeispiele in den Abhandlungen von Wieghardt und Schleicher erhärtet schließlich die Richtigkeit der neuen Theorie des schwimmenden Balkens.

Friedrich Klünger (Wien).<sup>oo</sup>

Villey, Jean: La décoordination de l'énergie cinétique. Rev. Sci. Paris **81**, 158 bis 160 (1943).

Ausgehend von der Energiegleichung für strömende Flüssigkeiten und Gase wird darauf hingewiesen, daß gewöhnlich die Energie  $m(w_1^2 - w_2^2)$  als „verschwunden“ bezeichnet wird, während sie bei glatten Wänden und ohne Schwere ihren Gegenwert findet in der Arbeit der an den Grenzflächen übertragenen Kräfte  $m(p_2 v_2 - p_1 v_1)$ . Eine Zerstreuung der Energie (in diesem Sinn wird hier „décoordination“ verstanden) kann nur stattfinden durch die beiden grundsätzlich verschiedenen Vorgänge: umkehrbar durch die Normalkräfte auf die Wände, und nicht-umkehrbar durch den Einfluß der Zähigkeit. Bei der turbulenten Strömung ergibt sich die Zerstreuung in zwei voneinander vollkommen verschiedenen Phasen: der makroskopischen durch Wirbelung und der molekularen durch einen transversalen Geschwindigkeitsunterschied ähnlich wie bei der Schichtenströmung, durch die eine Vermehrung der molekularen Energie, also Wärme entsteht, die einer Arbeit durch äußere Kräfte analog ist. Th. Pöschl (Karlsruhe).

Ribaud, G.: Nouvelle expression du coefficient de convection de la chaleur en régime d'écoulement turbulent. J. Phys. Radium, VIII. s. 2, 12—25 (1941).

Die Prandtlsche Formel für die turbulente Wärmeübertragung trifft nicht mehr zu, wenn der Beiwert  $C \frac{\mu}{\lambda}$  nicht klein gegen 1 ist, namentlich bei Flüssigkeiten mit großer Zähigkeit ( $C$  = spez. Wärme,  $\mu$  = Zähigkeitsbeiwert,  $\lambda$  = Wärmeleitfähigkeit). Verf. rechnet die Prandtlsche und von Kármánsche Grenzschichttheorie auf Grund des Mischungswegansatzes nochmals durch und kommt bei Anwendung derselben auf die turbulente Wärmeübertragung zu der Folgerung, daß das Temperaturgefälle beim Übergang von der rein turbulenten Grenzschichtgeschwindigkeit auf die wandnahe laminare Geschwindigkeitsverteilung eine Diskontinuität aufweist. Weiter wird gezeigt, daß der Mischungsvorgang die Wärmeübertragung bis näher an die Wand heran beeinflusst als die Geschwindigkeit. — Statt des Ansatzes für das Geschwindigkeitsgefälle in der wandnahen laminaren Grenzschicht  $du/dy = (f/\mu) \cdot \delta'/y$  ( $f$  = Reibungsbeiwert an der Wand,  $\delta'$  = laminare Grenzschichtdicke, wo die laminare und die turbulente Schubspannung einander gleich sind) wird geschrieben:  $du/dy = f/\mu(\delta'/y)^n$ ; mit  $n = 3$  (auf Grund experimenteller Ergebnisse) wird ein Ausdruck erhalten für die Wärmeübertragung  $\alpha = \mu C C_f R / 2d \left[ 1 + 0,75 \left\{ \left( C \frac{\mu}{\lambda} \right)^{2/3} - 1 \right\} \right]$ , welcher gut mit der Erfahrung übereinstimmt, auch wenn  $C \frac{\mu}{\lambda}$  über 100 wächst (Öle) ( $R$  = Reynoldssche Zahl bezogen auf die mittlere Geschwindigkeit;  $C_f$  = turbulente Schubspannung).

B. G. van der Hegge Zijnen (Delft).<sup>oo</sup>

Krahn, E.: Berechnung der zweiten Näherung der kompressiblen Strömung um ein Profil nach Janzen-Rayleigh. Luftf.-Forsch. **20**, 147—151 (1943).

Bei der bisherigen Berechnung der zweiten Näherung der ebenen kompressiblen adiabatischen Potentialströmung im Unterschallfall nach Janzen-Rayleigh gemäß der Gleichung

$$(1) \quad \Delta \varphi = \frac{M^2}{U^2} (u^2 u_x + uv(u_y + v_x) + v^2 v_y)$$



( $U$  = Anströmgeschwindigkeit,  $M = \frac{U}{c_\infty}$  = zugehörige Machzahl,  $u$  und  $v$  = Geschwindigkeitskomponenten,  $\varphi$  = Potential) wurde immer die Kenntnis der Abbildungsfunktion des Profils auf den Kreis und der inkompressiblen Strömung in der ganzen Ebene benutzt. Hier wird eine Methode gegeben, die lediglich die Kenntnis der inkompressiblen Strömung, der Abbildungsfunktion und ihrer Ableitung auf der Profilkontur selbst erfordert. Zu dem Zweck wird zunächst mit Hilfe der inkompressiblen Strömung ein partikuläres Integral von (1) von der Form  $\varphi_1 = \frac{M^2}{U^2} \cdot JK$  aufgestellt, wo  $J = J(x, y)$  und  $K = K(x, y)$  einzeln Lösungen der Laplaceschen Gleichung (2)  $\Delta\varphi = 0$  sind; dabei ist  $K = v - c$  ( $c$  Konstante) und  $J = \int uv \cdot dx + \frac{1}{2}(v^2 - u^2) \cdot dy$  ein Wegintegral, das eindeutig bleibt, solange der Integrationsweg keinen singulären Punkt umschließt. Für den bekanntlich alles wesentliche schon erfassenden Fall eines unter dem Winkel  $\alpha$  mit der Geschwindigkeit  $U$  angeströmten Kreises vom Radius  $a$  mit Zirkulation wählt man zweckmäßig  $c = U \cdot \sin \alpha$  und fügt zur Behebung der mit der Zirkulation verknüpften Mehrdeutigkeit von  $J$  noch das (2) genügende Glied

$$M^2 \cdot 2a \cdot \sin^2 \alpha \left[ (u - U \cos \alpha) \ln \frac{r}{a} + (v - U \sin \alpha) \theta \right]$$

hinzu, wo  $r$  und  $\theta$  die Polarkoordinaten eines als Integrationsweg genommenen Kreises bedeuten. Zu diesem partikulären Integral  $\varphi_2$  von (1) wird zuerst eine Lösung  $\chi$  von (2) addiert, die die bei  $\varphi_2$  am Kreis noch vorhandenen radialen Ableitungen zum Verschwinden bringt, und dann noch eine weitere Lösung von (2), die einen der beiden durch die vorhergehende Addition verschobenen Staupunkte am Kreis wieder in die Ausgangslage bringt. Diese am Kreis durchgeführten Überlegungen werden nun durch die üblichen elementaren Methoden der konformen Abbildung vom Kreis auf das vorgelegte Profil übertragen, dessen inkompressible Potentialströmung als bekannt vorausgesetzt wird; der Korrektur der Staupunkte entspricht hier die Rückverlegung des einen in die Profilhinterkante.

*Grell (Augsburg).*

**Krahn, E.: Die Janzen-Rayleighsche zweite Näherung der kompressiblen Strömung um ein beliebiges Profil.** Z. angew. Math. Mech. **23**, 33—35 (1943).

Verkürzte Wiedergabe der Resultate der im vorangehenden Referat genannten Arbeit für den Fall einer zirkulationsfreien Profilströmung.

*Grell (Augsburg).*

**Sauer, R.: Zur Theorie des nichtstationären ebenen Verdichtungsstoßes.** Ing.-Arch. **14**, 14—20 (1943).

Führt man in den exakten Gleichungen für Verdichtungsstöße den Grenzübergang zu schwachen Stößen durch, so zeigt sich, daß die Zustandsänderung näherungsweise als adiabatisch betrachtet werden darf. Zwischen dem Zustand vor und nach dem Stoß besteht die gleiche Beziehung wie in einer stetigen Verdichtungswelle, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Stoßes ist in dieser Näherung gleich dem Mittelwert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen vor und nach dem Stoß. Der Verf. leitet diesen Zusammenhang her und zeigt an zahlreichen Beispielen, wie man das von ihm stammende Parabel-Charakteristikendiagramm (vgl. dies. Zbl. **27**, 276) zur Berechnung solcher Stöße verwenden kann. Am Schluß findet sich noch eine Andeutung über die Behandlung starker Stöße.

*A. Busemann (Braunschweig).<sup>oo</sup>*

**Richter, Werner: Das Abwindfeld hinter Tragflügeln mit Klappenausschlag.** Luftf.-Forsch. **20**, 69—76 (1943).

Der Verf. berechnet das Abwindfeld hinter einem Flügel ohne Rumpf und Schraube, indem er den Flügel durch eine tragende Wirbellinie ersetzt und die Absenkung der nicht als aufgerollt vorausgesetzten Wirbelfläche berücksichtigt. Die Zirkulationsverteilung eines rechteckigen und zweier trapezförmiger Tragflügel mit und ohne Ausschlag

von Landeklappen wird nach dem bekannten Multhoppschen Verfahren ermittelt, worauf dann die Auswertung des auf Grund des Biot-Savartschen Gesetzes aufgestellten Integralausdrucks für den Abwindwinkel nach numerischen und graphischen Methoden erfolgt. Der Abwind wird für eine Ebene senkrecht zur Flugrichtung im Abstand einer halben Spannweite hinter dem Flügel errechnet; es wird somit die sonst meistens gemachte Beschränkung auf die Punkte der Wirbelfläche oder auf die Symmetrieebene fallen gelassen. Für jeden der schon erwähnten drei Flügelumrisse (vom Seitenverhältnis 6) werden sechs Fälle untersucht, indem die Größe des Klappenausschlags und der Betrag des Auftriebs variiert werden. Mitgeteilt wird das Feld des Abwindwinkels in einer Reihe von Schaubildern. Es zeigt sich dabei, daß der Flügelumriß von beträchtlichem Einfluß auf das Abwindfeld ist. v. Baranoff. °°

**Ertel, Hans:** Über stationäre oszillatorische Luftströmungen auf der rotierenden Erde. Meteor. Z. 60, 332—334 (1943).

Für die Grundströmung der Atmosphäre, der die Wettererscheinungen der gemäßigten Breiten als Störungen überlagert sind, wird meist das geostrophische Windfeld angesetzt. Dieses stellt eine Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichung mit rein zonalen Strömungen dar. Verf. sucht außerdem nach stationären Lösungen, die auch meridionale Bewegungskomponenten besitzen. Unter Beibehaltung der Annahme horizontaler Bewegungen und eines horizontal homogenen Massenfeldes werden die Bewegungsgleichungen für die kugelförmige, rotierende Erde angesetzt. Für die Stromfunktion  $\psi$ , deren Einführung zugleich die Kontinuitätsgleichung befriedigt, ergibt sich dann die nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (2\omega r^2 \cos \vartheta + \Delta \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (2\omega r^2 \cos \vartheta + \Delta \psi) = 0,$$

worin  $\vartheta$  die Poldistanz,  $\lambda$  die geographische Länge,  $\omega$  und  $r$  Winkelgeschwindigkeit und Halbmesser der Erde und  $\Delta$  den Laplaceschen Operator auf der Einheitskugel bedeuten. Wenn  $Y_n(\vartheta, \lambda)$  eine Laplacesche Kugelfunktion  $n$ -ter Ordnung ist, so ist  $\psi = -\frac{2\omega r^2}{n(n+1)-2} [\cos \vartheta + Y_n(\vartheta, \lambda)]$  mit ganzzahligem  $n > 1$  eine Lösung dieser Differentialgleichung. Da sich die  $Y_n(\vartheta, \lambda)$  durch die zugeordneten Legendreschen Kugelfunktionen  $P_n^m(\cos \vartheta)$  darstellen lassen, ist auch

$$\psi = -\frac{2\omega r^2}{n(n+1)-2} \left\{ \cos \vartheta + A_n^m P_n^m(\cos \vartheta) \sin(m\lambda + B_n^m) \right\}$$

eine spezielle Lösung, die für  $m = 1, 2, 3, \dots, n$  oszillatorische Strömungen darstellt. Nach dem Aussehen dieser Strömungen kann man drei Grundtypen unterscheiden: 1. den hemitesseralen Typ  $m = 1, 2, 3, \dots, n-2$ . Es treten auf jeder Halbkugel gegenläufige Oszillationen auf. 2. Den hemisektoriellen Typ  $m = n-1$ . Jede Halbkugel zeigt nur gleichläufige Oszillationen, die beiden Hemisphären jedoch zueinander gegenläufige. 3. Den holosektoriellen Typ  $m = n$ . Beide Hemisphären zeigen gleichsinnige Oszillationen, die am Äquator mit maximalen Amplituden ineinander übergehen.

F. Möller (Frankfurt/M.).

### Thermodynamik:

**Tuomikoski, P.:** Über die Bestimmung der Veränderungen der freien Enthalpien beim Mischen von Flüssigkeiten auf Grund der Dampfdruckmessungen. Ann. Acad. Sci. Fennicae A I, Nr 17, 1—25 (1943).

Zur Ermittlung der thermodynamischen Funktionen in Mischungen, speziell der freien Enthalpien, wird folgendes Verfahren vorgeschlagen: Bei binären Mischungen wird der gesamte Dampfdruck über der Mischung gemessen und mit Hilfe der Duhem-



Marguleschen Gleichung der Partialdruck der Einzelkomponenten berechnet. Diese Berechnung gelingt nicht mit Hilfe geschlossener Formeln, sondern muß numerisch durchgeführt werden. Mittels der Beziehungen  $\Delta G_i = RT \ln a_i$  und  $a_i = \frac{p_i}{p_{is}}$ , wo  $a_i$  die Aktivität der  $i$ -ten Komponente,  $p_i$  ihr Partialdruck,  $p_{is}$  ihr Sättigungsdruck und  $\Delta G_i$  die Änderung der partiellen freien Enthalpie beim Mischen ist, gelingt es, die freie Enthalpie der Komponenten zu ermitteln. Die Mischungswärme kann dann in bekannter Weise durch Differentiation der  $a_i$  nach der Temperatur erhalten werden usw. Das Verfahren wird an speziellen Beispielen (Benzol-Tetrachlorkohlenstoff) numerisch vorgeführt, wobei die Integration der Duhem-Marguleschen Gleichung mittels einer Differenzen- und Interpolationsmethode durchgeführt wird. *K. Schäfer* (Göttingen).

**Darmois, E.:** *La thermodynamique des solutions.* J. Phys. Radium, VIII. s. 4, 129—142 (1943).

Diese Zusammenfassung thermodynamischer Rechenmethoden zeigt, in welcher Weise das Verhalten der Lösungen und Mischungen mit Hilfe der thermodynamischen Funktionen erfaßt werden kann. Dies geschieht in Analogie zu den Gasmischungen durch Einführung der Aktivitäten und der übrigen partiellen molaren Größen bzw. Funktionen. Da diese Funktionen sich durch partielle Differentiation der Funktionen: freie Enthalpie, Volumen, Energie usw. nach den einzelnen Molzahlen in der Mischung ableiten, die Funktionen: freie Enthalpie usw. aber homogen vom ersten Grade in den Molzahlen  $n_1, n_2, \dots$  der Komponenten der Mischung sind, so gilt nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen: (1)  $F = n_1 \frac{\partial F}{\partial n_1} + n_2 \frac{\partial F}{\partial n_2} + \dots$ , wo  $F$  irgend eine der erwähnten Funktionen ist. Für die partiellen molaren Größen  $\frac{\partial F}{\partial n_i} = F_i$  läßt sich dann rein mathematisch durch Variation der Molzahlen um  $\delta_1, \delta_2, \dots$ , wo  $\delta_1 : \delta_2 : \dots = n_1 : n_2 : \dots$  ist, sofort zeigen, daß (2)  $n_1 \frac{\partial F_1}{\partial n_1} + n_2 \frac{\partial F_2}{\partial n_1} + \dots = 0$  gelten muß. Die Anwendung der Gleichung (2) auf die partielle freie Enthalpie, für die der Ansatz  $F_i = F_{i0} + RT \ln a_i$  gemacht wird, durch den die Aktivität  $a_i$  einer Komponente definitionsgemäß eingeführt ist, erhält man sofort die bekannte Gleichung von Duhem-Margules, die aber in entsprechender Gestalt auch für die anderen partiellen molaren Größen hingeschrieben werden kann. Es lassen sich dann leicht die Vereinfachungen durchführen, die im Falle  $a_i = \gamma_i$  ( $\gamma_i$  = Molenbruch) gelten und die zu den bekannten Gesetzen der idealen Lösungen bzw. der verdünnten Lösungen führen, je nachdem  $a_i = \gamma_i$  durchweg oder nur für das Lösungsmittel bei  $\gamma \approx 1$  gilt. Darüber hinaus läßt sich im Anschluß an obige Ausführung leicht der Typ der regulären Lösungen definieren, bei dem die partielle molare Entropie einer Komponente  $i$  sich um  $-R \ln \gamma_i$  von der Entropie der betreffenden Komponente im reinen Zustand unterscheidet.

*K. Schäfer* (Göttingen).

**Molland, Jacob:** *Généralisation d'un problème qui se rattache à l'étude d'une classe de réactions chimiques.* Arch. Math. og Naturvid. B 46, Nr 5, 139—154 (1943).

Wenn ein Stoff  $T$  mit zwei Substanzen  $Q$  und  $R$  unter Bildung der Verbindungen  $T^iQ$  und  $T^iR$  und eines Stoffes  $X$  gemäß  $lT + Q \rightarrow T^iQ + mX$  bzw.  $lT + R \rightarrow T^iR + mX$  reagieren kann, so kann man für die Geschwindigkeit der Reaktion die Beziehung aufstellen: (1)  $dz = [f c_n (a - z)^n - (1 - f) \gamma_n z^n] dt$ , wo  $t$  die Zeit,  $z$  die zur Zeit  $t$  vorliegende Konzentration  $T^iR$ ,  $a$  die bei  $t = 0$  vorhandene Konzentration  $T^iQ$ , also  $a - z$  die bei  $t$  vorliegende Konzentration  $T^iQ$  ist, falls  $t = 0$  und  $z = 0$  einander entsprechen; ferner ist  $n$  die Ordnung der Reaktionen,  $c_n$  und  $\gamma_n$  sind die Geschwindigkeitskonstanten der Zerfallsreaktionen  $T^iQ + mX = lT + Q$  usw., während  $f = [T^iR] : ([T^iR] + [T^iQ])$ . Die Gl. (1) ergibt sich durch die Materialbilanz der zwischen  $t$  und  $t + dt$  gebildeten und zersetzten ( $T^iR$ )-Molekeln. Verf. löst die Gleichung (1) für  $n=1, 2, 3 \dots$  und verschiedene Anfangsbedingungen durch die Methode der Partialbruchzerlegung. *K. Schäfer*.

## Elektrodynamik:

● Prokott, Ernst: Theoretische Grundlagen und Anwendungen der Modulation in der elektrischen Nachrichtentechnik. (Physik u. Techn. d. Gegenw., Abt. Fernmelde-techn. Hrsg. v. Heinrich Fassbender Bd. 21.) Leipzig: S. Hirzel 1943. VIII, 204 S. u. 147 Abb. RM. 14.50.

Unter Modulation wird die Umsetzung eines Nachrichtenzeichens  $f(t)$  mittels eines „Trägers“  $S \sin \Phi$ ,  $\Phi = \Omega t + \varphi$  in eine andere Form, insbesondere in einen anderen Frequenzbereich zum Zwecke vorteilhafterer Nachrichtenübermittlung verstanden. Die Rückumwandlung heißt Demodulation. Je nachdem durch technische Schaltmittel bewirkt wird, daß  $S$ ,  $\Phi$  oder  $\frac{d\Phi}{dt}$  linear von  $f(t)$  abhängen, spricht man von Amplituden-, Phasen- oder Frequenzmodulation. Mit  $f(t) = \sin \omega t$  entstehen im ersten Fall neben der Trägerfrequenz  $\Omega$  die beiden „Seitenbänder“ mit den Frequenzen  $\Omega \pm \omega$ , im zweiten und dritten Fall dagegen unendlich viele neue Frequenzen, deren Amplituden sich mittels Besselscher Funktionen berechnen lassen. Der Theorie solcher Modulationen und der zugehörigen Demodulationen ist die erste Hälfte des bekannten und für die Nachrichtentechnik grundlegende Dinge zusammenfassend darstellenden Lehrbuches gewidmet. Der zweite Teil behandelt eine größere Anzahl von Modulationsschaltungen und erläutert deren Wirkungsweise. Die Darstellung ist ausführlich und leicht verständlich, wendet sich an den Ingenieur und Physiker und vermeidet ein Eingehen auf schwierigere mathematische Fragen. Als Schüler von Pungs räumt der Verf. den Modulationsschaltungen der drahtlosen Technik breiteren Raum als dem in der Trägerfrequenz-Leitungstechnik gebräuchlichen Ringmodulator und verwandten Modulatoren ein. *Cauer* (Berlin).

Rice, S. O.: Steady state solutions of transmission line equations. Bell Syst. techn. J. 20, 131—178 (1941).

Die rein sinusförmig periodischen Lösungen der Kreisfrequenz  $\omega$  von Verallgemeinerungen der homogenen Differentialgleichungen einer homogenen Doppelleitung

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu$$

auf ein System von Vielfachleitungen werden mit bei Frazer, Duncan and Collar, „Elementary matrices“ (vgl. dies. Zbl. 21, 228) dargestellten Hilfsmitteln der Matrizenrechnung behandelt. An Stelle des auf die Längeneinheit bezogenen Übertragungsmaßes  $\gamma = \sqrt{(L\omega i + R)(C\omega i + G)}$  tritt dann eine quadratische Matrix  $\Gamma$ . Auch entsprechende inhomogene Differentialgleichungssysteme (Vorhandensein eines äußeren Feldes längs der Leitung) und Vielpole, die sich aus einer Kette von gleichen symmetrischen oder unsymmetrischen Vielpolen zusammensetzen und auf mit den vorbesprochenen Differentialgleichungssystemen verwandte Differentialgleichungssysteme führen, werden formal bei festem  $\omega$  ohne Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit untersucht [vgl. dazu S. Koizumi, Arch. Elektrotechnik 33, 171—188, 609—622 (1939)].

*Cauer* (Berlin-Marienfelde).

Tărbănescu, T.: Résonance des circuits couplés. Bul. Politehn., București 13, 162—178 (1942).

Verf. geht von verschiedenen Schaltungen zweier miteinander gekoppelter Schwingungskreise, welche je eine Induktivität, eine Kapazität und einen Widerstand enthalten, aus. Als Kopplungselemente werden eine gegenseitige Induktivität, eine Kapazität in zwei Schaltungen und eine gemeinsame Induktivität verwendet. Mit Hilfe des Satzes von Thévenin, der auch manchmal nach Helmholtz benannt wird, läßt sich der Stromverlauf in beiden Kreisen formelmäßig darstellen. Verf. führt nun eine Anzahl neuer Hilfsgrößen ein, welche den Kopplungsgrad, die Kreisfrequenzen beider Kreise und die Dämpfungen derselben bestimmen. Für diese verschiedenen Hilfsgrößen werden anschauliche Deutungen gegeben. Hierauf geht Verf. zu einer graphischen Darstellung des Stromes im Sekundärkreis in einer komplexen Ebene über. Die



Resonanzkurven werden hier durch Parabeln 2. und 3. Ordnung dargestellt. Mit Hilfe dieser Kurven gelingt es, in einfacher Weise die verschiedenen Kreiseigenschaften zu überblicken bzw. eine Gesamtschaltung mit angenähert vorgegebenen Eigenschaften zu bestimmen.

*M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

**Leiterer, L.: Strom- und Spannungsverteilung im randverbundenen Kondensatorwickel.** Elektr. Nachr.-Techn. **20**, 170-182 (1943).

Verf. stellt den obengenannten Kondensator durch einen Mehrfachzylinderkondensator dar. Für die Strom- und Spannungsverteilung zwischen je zwei benachbarten Belegungen letzteren Kondensators gilt eine einfache Differentialgl. In Verbindung mit den übrigen Belegungen wird Verf. auf ein System simultaner linearer Differentialgl. zweiter Ordnung geführt. Dieses System von Differentialgl. löst er durch Hyperbelfunktionen. Eine mögliche Lösung des Gesamtsystems entsteht dann, wenn die Koeffizientendeterminante des Lösungssystems verschwindet. Verf. diskutiert die Wurzeln dieser Determinantengl. und gibt eine Übersicht über die Näherungslösungen derselben. Darauf stellt er die Teilströme der einzelnen Belegungen zum Gesamtkondensatorstrom zusammen und stellt die Stromverteilung in diesem Kondensator mit Hilfe eines räumlichen Modells dar. Bei sehr hohen Windungszahlen nähert sich diese Stromverteilung einer einfachen Kurve. Aus der Stromverteilung lassen sich die Spannungsverteilung, der Gesamtstrom und die praktisch wichtigen komplexen Widerstände des Kondensators bestimmen. Verf. führt die betr. Rechnung durch und gibt für ein bestimmtes Beispiel eine berechnete Kurve des komplexen Kernwiderstandes, welche mit gemessenen Werten verglichen wird. Die Übereinstimmung ist befriedigend. *M. J. O. Strutt.*

**Marinescu, Matei Gh.: Un nouveau circuit sélectif.** Bul. Politehn., București **13**, 157—191 (1942).

Verf. geht von einem Stromkreis aus, der eine Spannungsquelle mit innerem Widerstand enthält. Diese Spannungsquelle ist an der Parallelschaltung einer verlustbehafteten Induktivität und einer Kapazität angeschlossen. Er betrachtet nun die entstehende Spannung an den Anschlußklemmen dieser Parallelschaltung und insbesondere die Änderung dieser Spannung bei einer kleinen Änderung der Kreisfrequenz in der unmittelbaren Umgebung der Resonanzfrequenz des Schwingungskreises. Als zweite Schaltung ist die genannte Spannungsquelle am Eingang eines spannungsrückgekoppelten Verstärkers (Vierpol, dessen Ausgangsklemmen über einem zweiten Vierpol mit den Eingangsklemmen verbunden sind) angeschlossen. Verf. berechnet nun wieder die Spannung an den Anschlußklemmen im Verhältnis zur Quellenspannung. Infolge der Rückkopplung ist es möglich, die Änderung dieser Spannung bei einer kleinen Änderung der Kreisfrequenz in der Umgebung der Resonanzfrequenz theoretisch beliebig groß zu machen. In Wirklichkeit tritt aber bei starker Vergrößerung der genannten Spannungsänderung Schwingneigung des rückgekoppelten Vierpols auf. Verf. gibt nun eine neue Schaltung an, welche den letzteren Nachteil nicht enthält. Die Schaltung besteht aus einer symmetrischen Gegentaktsanordnung mit zwei rückgekoppelten Vierpolen. Es zeigt sich, daß mit Hilfe dieser Anordnung die genannte Spannungsänderung stark gesteigert werden kann, ohne daß Schwingneigung auftritt. *M. J. O. Strutt.*

**Minorsky, Nicholas: Control problems.** J. Franklin Inst. **232**, 451—487, 519—551 (1941).

In diesen beiden Aufsätzen gibt der Verf., der selbst auf dem Gebiet der Stabilisierung von Schiffen gearbeitet hat, einen Überblick über die Art der theoretischen Behandlung von Regelproblemen in den USA. Im allgemeinen geht die Darstellung über die hier bekannten Methoden nicht hinaus. Regler mit nichtlinearer Kennlinie erfahren jedoch eine besondere Beachtung. Regler und zu regelnde Systeme sind nach ihrer Gleichung, nicht nach dem gerätetechnischen Aufbau geordnet. Auch dort ist aufgeteilt in: Regelstrecke (system to be controlled per se), Regler (control system), Regelkreis (controlled system); dazu kommt eine äußere Störungsfunktion (external disturbing action). In der mathematischen Darstellung wird von der Operatoren- und



Summenschreibweise Gebrauch gemacht:  $A_2\theta'' + A_1\theta' + A_0\theta = D$  wird geschrieben als  $[A]\theta = D$  bzw.  $\sum_{i=0}^2 A_i\delta^i = D$ , wobei der Operator  $[A] = \left[ A_2 \frac{d^2}{dt^2} + A_1 \frac{d}{dt} + A_0 \right] = [A_2\delta^2 + A_1\delta + A_0]$  bedeutet. Rechenregeln für Operatoren werden angegeben. Die Gleichung zweiter Ordnung wird als „fundamental control system“ bezeichnet. Am Beispiel eines Pendels mit durch den Regler einstellbarem Zusatzmoment werden einfache Regelkreise erläutert: Aufschaltung von Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Lagenintegral sowie höheren zeitlichen Ableitungen. Als Kriterium für die Stabilität werden die Bedingungen von Hurwitz, Routh und Liapounoff angegeben. Zeitverzögerungen im Regelkreis werden mittels der Taylorschen Reihe angesetzt; besondere Überlegungen sind angestellt, um diese Reihe durch eine einfache Differentialgleichung anzunähern. Stetige Regler mit Elektronenröhren oder Stromtoren werden als Entwicklungsziel angegeben. *W. Oppel (Berlin)*°°

Niessen, K. F.: Mittlere Frequenzstabilität von Hohlräumen. *Physica*, Haag **9**, 145 bis 157 (1942).

In einer vorangehenden Arbeit (dies. Zbl. **26**, 373) hat Verf. die Änderung der Grundfrequenzen der elektromagnetischen Schwingungen in einem hohlen metallischen Würfel bzw. einer ebensolchen Kugel bei Deformation des Hohlraumes behandelt; er war dabei von solchen Deformationen ausgegangen, die die Grundfrequenz wieder in eine solche überführen. Diese Beschränkung läßt Verf. nunmehr fallen. Er betrachtet Streckungen entlang einer der drei Hauptrichtungen und Kontraktionen in den beiden darauf senkrechten Hauptrichtungen; fällt die Streckungsrichtung mit der der Grundschwingung zusammen, so entsteht wieder eine Grundschwingung, steht sie aber darauf senkrecht, so kann die ursprüngliche Grundschwingung in eine Oberschwingung des deformierten Hohlraumes übergehen. Um zu einem Maß für die Frequenzstabilität zu kommen, mittelt Verf. über die drei neu entstandenen Frequenzen unter Berücksichtigung lediglich der linearen Deformationsglieder. Es zeigt sich, daß die so definierten Frequenzstabilitäten von Würfel und Kugel praktisch gleich groß sind, selbst dann, wenn man die Längs- und Querdeformationen durch die Forderung konstant bleibender Oberfläche miteinander verknüpft. *Harald Geppert (Berlin)*.

Ledinegg, E.: Das Feldlinienbild des dem kreiszylindrischen Hohlraum zugeordneten magnetischen Schwingungstyps. *Hochfrequenztechn.* **62**, 38—44 (1943).

Die Arbeit schließt an eine Untersuchung von Borgnis (dies. Zbl. **27**, 361) an; sie untersucht die magnetische Grundschwingung vom  $H_{1,1,1}$ -Typ in einem kreiszylindrischen Hohlraumresonator der Länge  $l$  und des Radius  $R$ . Bezeichnet  $y'_{1,1}$  die erste Nullstelle von  $I'_1(x)$ , so lautet die Diff.gl. der in Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse liegenden elektrischen Kraftlinien:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{\beta} \frac{I_1(\beta r)}{I'_1(\beta r)} \tan \varphi, \quad \beta = \frac{y'_{1,1}}{R}.$$

Verf. zeichnet und diskutiert sie. Errichtet man auf deren orthogonalen Trajektorien Zylinder parallel der  $z$ -Achse ( $H$ -Zylinder), so liegen auf jedem derselben unendlich viele magnetische Kraftlinien. Um diese eindeutig festzulegen, bestimmt er sie als Schnitte der  $H$ -Zylinder mit Drehkörpern  $K$  um die  $z$ -Achse; letztere bestimmen sich aus der Gleichung

$$\log \cos \sin \frac{\pi}{l} z = \int \frac{I_1(\xi)}{I'_1(\xi)} d\xi, \quad \xi = \beta r.$$

Der Berechnung dieses Integrals ist ein Anhang gewidmet. Verf. zeichnet hiernach diese magnetischen Kraftlinien und verfolgt insbesondere ihren Verlauf auf dem Zylindermantel. Die Oberschwingungen des magnetischen Typs lassen sich in ähnlicher Weise durch die  $H$ -Zylinder und Drehkörper  $K$  veranschaulichen. Alle metallisch ausgekleidet gedachten  $H$ -Zylinder schwingen mit dem Grundzylinder in derselben Frequenz.

*Harald Geppert (Berlin)*.



## Optik:

Nijboer, B. R. A.: The diffraction theory of optical aberrations. 1.: General discussion of the geometrical aberrations. *Physica*, Haag 10, 679—692 (1943).

Der Verf. gibt einen neuen Versuch einer Übersicht über die Abweichungen einer achsensymmetrischen Linsenfolge. — Ein Punkt  $P'$  liege in der Gaußischen Bildebene um  $\sigma$  von der Achse ab.  $O''$  sei die Mitte der Austrittspupille (A.P.). Beschreibt man um  $P'$  mit  $P'O'' = R$  eine Kugelfläche, so wäre sie bei fehlerfreier Abbildung eine Wellenfläche; es wird ferner angenommen, daß man als A.P. eine Kugelzone betrachten kann, deren Halbmesser  $a$  gleich der der A.P. ist; ferner wird die Abbildung nicht auf einer achsen-senkrechten, sondern auf einer zu  $P'O''$  senkrechten Ebene betrachtet; für die besonderen Zwecke der Arbeit, von der hier ein Teil vorliegt, ist dies vorteilhaft. — Sind nun Abweichungen vorhanden, so wird die Gleichung der Wellenfläche von der der Kugel um eine Funktion  $V(\sigma, r, \varphi)$  abweichen. Hier ist  $r$  der Abstand des Punktes  $P''$  der A.P., durch den der Strahl geht, von  $P'O''$ ,  $\varphi$  der Winkel der Ebene  $P'O''P''$  mit der Meridianebene. — Mit einer Vernachlässigung wird die Gleichung des durch  $P''$  gehenden Strahles abgeleitet und damit die Koordinaten seines Schnittpunktes mit der zu  $P'O''$  senkrechten Ebene bestimmt.

$$y = \frac{R}{a} \left\{ \cos \varphi \frac{\partial V(\sigma, r, \varphi)}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial V(\sigma, r, \varphi)}{\partial \varphi} \right\}, \quad x = \frac{R}{a} \left\{ \sin \varphi \frac{\partial V(\sigma, r, \varphi)}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial V(\sigma, r, \varphi)}{\partial \varphi} \right\}.$$

(Für  $r$  ist  $a$  als Einheit gewählt.)  $V$  ist Funktion von  $\sigma^2, r^2, \sigma r \cos \varphi$ , und dem üblichen Verfahren entspräche es,  $V$  nach Potenzen dieser drei Größen zu entwickeln. Statt dessen wird eine Entwicklung gewählt, deren allgemeines Glied die Form  $b_{lmn} \sigma^{2l+m} r^n \cos m \varphi$  hat, wo  $l, m, n$  positive ganze Zahlen oder Null sind,  $n \geq m, n - m$  gerade. Greift man ein Glied heraus, so findet sich, daß eine einzelne Abweichung Kurven der Form hervorbringt:

$$y = b_{lmn} \sigma^{2l+m} \frac{R}{a} r^{n-1} \left\{ \frac{n+m}{2} \cos(m-1) \varphi + \frac{n-m}{2} \cos(m+1) \varphi \right\}$$

$$x = b_{lmn} \sigma^{2l+m} \frac{R}{a} r^{n-1} \left\{ -\frac{n+m}{2} \sin(m-1) \varphi + \frac{n-m}{2} \sin(m+1) \varphi \right\}.$$

Für verschiedene  $r$  sind die Kurven einander ähnlich, bei  $m \neq 1$  schließen sie den Nullpunkt ein, die Kurve für  $r = 1$  begrenzt die Figur; bei  $m = 1$  entsteht die bekannte Koma(Asymmetrie)figur. Glieder mit  $n = m = 0$  haben keine Bedeutung. Die Ordnung des Fehlers ist  $2l + n + m - 1$ . Man kommt auf zwei Glieder erster Ordnung (Einstellungsfehler), 5 Fehler 3. Ordnung (Seidelsche Fehler) usf. Weiter ergibt sich die Einteilung:  $b_{011} \sigma r \cos \varphi$  gibt einen seitlichen Einstellungsfehler von  $b_{011} \sigma R/a$ ,  $b_{111} \sigma^3 r \cos \varphi$ ,  $b_{211} \sigma^5 r \cos \varphi \dots$  bedeuten Verzeichnungen von  $b_{111} \sigma^3 R/a$ ,  $b_{211} \sigma^5 R/a \dots$   $b_{020} r^2$  ist ein Bildeinstellungsfehler,  $b_{120} \sigma^2 r^2$ ,  $b_{220} \sigma^4 r^2 \dots$  bedeuten die meridionale Bildfeldkrümmung.  $b_{040} r^4$  kennzeichnet das erste Glied des Öffnungsfehlers,  $b_{140} \sigma^2 r^4 \dots$ , allgemein  $b_{l40} \sigma^{2l} r^4$  das nämliche für Punkte außer der Achse. Entsprechend geben  $b_{031} \sigma r^3 \cos \varphi$  und  $b_{022} \sigma^2 r^2 \cos 2\varphi$  die Koma (Asymmetrie) und den Zweischalenfehler,  $b_{131} \sigma^{2l+1} r^3 \cos \varphi$ ,  $b_{122} \sigma^{2l+2} r^2 \cos 2\varphi$  geben Zonen dieser Fehler nach dem Gesichtsfeld. Die Zonen (Zwischenfehler) nach der Öffnung werden in den 4 letzten Fällen durch höhere Potenzen von  $r$  gegeben. Höhere Werte von  $m$  geben Abweichungskurven eigentümlicher Art, ein Beispiel wird durch eine Zeichnung erläutert.

Hans Boegehold (Jena).

Bouwers, A., and A. C. S. van Heel: On the luminosity of optical systems. *Physica*, Haag 10, 714—719 (1943).

Die Helligkeit einer Linsenfolge ist dem Quadrate des Sinus des (ding- oder bildseitigen) Öffnungswinkels proportional. Man nimmt als Maß gerne das Verhältnis des Durchmessers der Eintrittspupille zur Brennweite an. Die Verf. machen darauf aufmerksam, daß dies nur für unendlich entfernten Gegenstand streng richtig sei. — Sie empfehlen,



für einen gegebenen Abbildungsmaßstab den Durchmesser des Lichtkegels in der Dinghauptebeine durch die Brennweite zu dividieren und dieses „verallgemeinerte Öffnungsverhältnis“, das ein guter Näherungswert für den doppelten Sinus sei, als Maß für die Lichtstärke anzuwenden; es ändert sich, wenn die Dingweite und damit der Abbildungsmaßstab geändert wird.

*Hans Boegehold (Jena).*

**Toraldo di Francia, Giuliano: Das Prinzip der „umgekehrten Interferenz“ und seine Anwendungen.** Z. Instrumentenkde. **63**, 356—358 (1943).

Der Verf. will einen Grundsatz aufstellen, durch den man Interferenz- und Beugungserscheinungen ohne weitere Annahmen mathematisch darstellen kann. — Sei  $\Sigma$  eine Oberfläche, die den Raum in zwei Gebiete  $G_1$  und  $G_2$  teilt. Eine beliebige einfallende Welle  $W$  aus  $G_1$  erhalte durch die stofflichen Eigenschaften von  $\Sigma$  dort eine Amplitude  $A(P)$  und eine Phase  $\varphi(P)$ , die Funktionen des Ortes  $P$  sind. Der Grundsatz der umgekehrten Interferenz lautet: „Kann man ein System von Wellen zweckmäßiger Form, Lichtstärke und Phase erfinden, die aus  $G_1$  kommend und auf  $\Sigma$  interferierend eine Schwingungsamplitude  $A(P)$  und eine Phase  $\varphi(P)$  erzeugen, so werden sich wirklich diese Wellen nach  $G_2$  fortpflanzen, infolge des Einfallens von  $W$  auf  $\Sigma$ .“ — Es wird gezeigt, daß man im Falle eines einfachen Gitters auf diese Weise die bekannte Beugungserscheinung ableiten kann, und auseinandergesetzt, wie in verwickelteren Fällen zu verfahren ist. — Weiter verweist der Verf. darauf, daß auch bei unendlich großer Öffnung Wellen fortfallen würden, weil der Sinus der Beugungswinkel größer als 1 würde, er bemerkt, daß er in verschiedenen, 1941/2 in der „*Ottica*“ veröffentlichten Aufsätzen die Bedeutung dieser „oberflächlichen Wellen“ behandelt habe.

*Hans Boegehold (Jena).*

## Atomphysik.

### Elektronentheorie:

**König, H. W.: Über das Verhalten von Elektronenströmen im elektrischen Längsfeld.** Hochfrequenztechn. **62**, 76—86 (1943).

Für den Fall einer ebenen Elektronenströmung, bei welcher Überholungs- und Umkehreffekte ausgeschlossen und die magnetischen Wechselwirkungskräfte unberücksichtigt bleiben, werden die Grundgleichungen integriert für eine Anordnung, bei welcher einem reinen Elektronen-Gleichstrom  $I_0$  ein Wechselstrom  $I \sin \omega t$  überlagert ist. In der allgemeinen Lösung treten zwei willkürliche Funktionen auf, deren Bestimmung auf Grund der beiden Randbedingungen erfolgt, daß an einer Unstetigkeitsstelle des Stromes, die durch eine in die Strömung eingeführte ideale Elektrode (Gitter) entsteht, die Geschwindigkeit und Dichte der Ladungsteilchen einen stetigen Übergang erfahren. Die elektrische Feldstärke  $F$  und die Geschwindigkeit  $u$  erscheinen in der Lösung als Funktionen des Phasenwinkels  $\varphi = \omega t$  und eines Parameters  $\psi$ , welcher durch die „Laufzeitgleichung“ mit dem virtuellen Laufzeitwinkel  $z = \omega x/v_0$  und dem Phasenwinkel  $\varphi$  verknüpft ist. Die Größe  $\psi$  ist der tatsächliche Laufzeitwinkel. Die Untersuchung der Laufzeitgleichung hinsichtlich ihrer eindeutigen Auflösbarkeit nach  $\psi$  ergibt die Bedingung der eindeutigen Strömung. Diese führt auf eine Beziehung zwischen Stromaussteuerung  $p = I/I_0$ , der Gleichfeldstärke an der Elektronen-Eintrittsstelle und dem virtuellen Laufwinkel  $z$ , währenddessen die Strömung dem Wechselfeld unterworfen ist. Auf Grund des Lagrangeschen Umkehrsatzes wird die Laufzeitgleichung in Gestalt einer rasch konvergierenden Reihe gelöst, mit deren Hilfe die an der Elektronenstrecke liegende Spannung und der Wirkungsgrad der Energieumsetzung ermittelt werden.

*W. Glaser (Prag).*